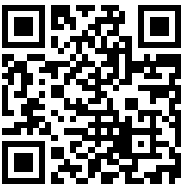
This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com





A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

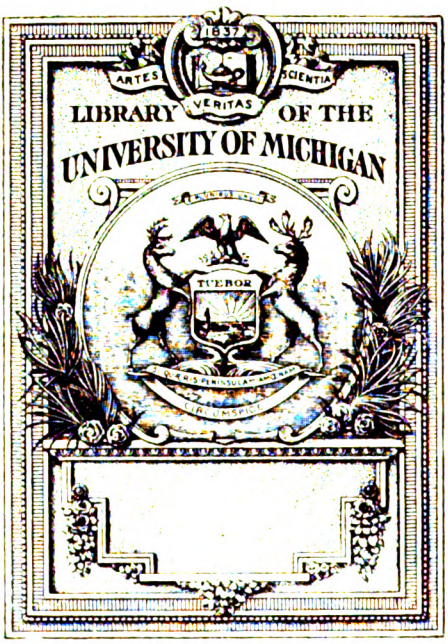
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

B 531662 DUPL



THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET

Digitized by Google

QC
518
.P78

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

54-73 11.3

Alexandre Ziwet

BIBLIOTHÈQUE DES ANNALES DES POSTES, TÉLÉGRAPHES ET TÉLÉPHONES.

COURS D'ÉLECTRICITÉ THÉORIQUE

PROFESSÉ

A L'ÉCOLE PROFESSIONNELLE SUPÉRIEURE DES POSTES ET TÉLÉGRAPHES

PAR

J.-B. POMEY,

INGÉNIEUR EN CHEF DES POSTES ET TÉLÉGRAPHES.

AVEC UNE PRÉFACE

DE

L. LECORNU,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

TOME I.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55

1914

Digitized by Google

Digitized by Google

COURS

D'ÉLECTRICITÉ THÉORIQUE

Digitized by Google

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie.
52810 Quai des Grands-Augustins, 55.

Digitized by Google

5473 11.3

Alexandre Ziwet

BIBLIOTHÈQUE DES ANNALES DES POSTES, TÉLÉGRAPHES ET TÉLÉPHONES.

COURS
D'ÉLECTRICITÉ THÉORIQUE

PROFESSÉ

A L'ÉCOLE PROFESSIONNELLE SUPÉRIEURE DES POSTES ET TÉLÉGRAPHES

PAR

J.-B. POMEY,

INGÉNIEUR EN CHEF DES POSTES ET TÉLÉGRAPHES.

AVEC UNE PRÉFACE

DE

L. LECORNU,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

TOME I.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55

1914

Digitized by Google

Prof. Alex. Ziwet
at.
1-31-1923

QC
518
P78

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.

Digitized by Google

PRÉFACE.

Pendant longtemps, l'Astronomie a été à peu près le seul champ d'application des hautes Mathématiques. De nos jours, un nouveau domaine, celui de l'Électricité, s'est largement ouvert devant elle. L'électrotechnique n'est pas, comme l'hydraulique ou comme l'art des constructions, obligée de s'en tenir à des approximations plus ou moins discutables : elle dérive, directement et sûrement, de la pure spéculation.

Aussi le Cours professé par M. Pomey à l'École supérieure des Postes et Télégraphes présente-t-il, en dépit de son titre, un intérêt qui n'est pas exclusivement théorique. Les développements mathématiques, qui y tiennent la plus grande place, sont nécessaires pour former des ingénieurs appelés à contrôler les distributions d'énergie électrique.

Ce Cours procède de celui qui était antérieurement professé par Vaschy; mais l'auteur a élargi le cadre suivant les exigences des idées modernes. Vaschy demeurait sur le terrain de l'expérience et du raisonnement; il s'attachait à rejeter toute hypothèse. M. Pomey est moins exclusif : il ne s'interdit pas de parler des molécules, des ions, des électrons, de toutes ces entités qui aident si largement à la compréhension des phénomènes qu'on dirait volontiers, en parlant d'elles : « Si elles n'existent pas, il faut les inventer ».

416696

Digitized by Google

Sans prétendre faire une analyse complète de l'Ouvrage, je signalerai quelques-uns des points les plus saillants.

Il est aisé de définir, dans un milieu fluide, les vecteurs représentant l'intensité du champ et l'induction électrostatique. La chose est moins simple dans le cas des milieux polarisables : contrairement à ce qui arrive dans le premier cas, les deux vecteurs sont alors distincts, non seulement en grandeur, mais encore en direction. L'induction électrostatique est, à un facteur numérique près, le déplacement de Maxwell. Le champ électrique a une distribution irrotationnelle; le déplacement a une distribution solénoïdale. De ces deux vecteurs, définis expérimentalement par une méthode nouvelle, l'auteur déduit le vecteur représentant la polarisation. De même, dans les milieux conducteurs, il faut distinguer le vecteur *intensité* du champ électrique et le vecteur *courant*.

Le théorème de Vaschy est établi par M. Pomey au moyen d'une identité qui, dans le cas des phénomènes électromagnétiques, traduit le principe d'égalité de l'action et de la réaction. Ce théorème est ensuite étendu au cas où le point considéré se trouve sur une surface de discontinuité. De là se déduisent l'équation fonctionnelle de Robin, concernant les corps conducteurs, et une équation analogue relative aux diélectriques.

La distribution des courants au sein d'une masse métallique est étudiée par deux méthodes distinctes. L'une d'elles consiste à écrire que le courant est une fonction linéaire du champ. L'autre prend pour point de départ la distribution dans les conducteurs linéaires : on montre que cette distribution correspond à un minimum de la chaleur de Joule, et l'on étend ensuite la même propriété aux milieux isotropes.

Le problème de la décharge d'un condensateur conduit à la notion du courant de déplacement. La loi de Faraday établit un lien entre ce courant et la grandeur de la charge.

Après avoir obtenu, suivant la marche tracée par H. Poincaré, l'expression de l'énergie électrostatique, l'auteur évalue le travail résultant d'une variation dans la distribution des courants,

Digitized by Google

et il est ainsi conduit à définir le potentiel électrodynamique.

Les deux groupes d'équations du champ électromagnétique sont établis indépendamment l'un de l'autre. Le premier groupe définit le courant de déplacement; le second résume les lois de l'induction. On en déduit le théorème de Poynting. Dans le cas des milieux en mouvement, on est amené à envisager le flux traversant un diaphragme entraîné avec le milieu. Le courant total apparaît alors comme comprenant, avec le courant de conduction et le courant de déplacement, deux termes complémentaires, dont le plus important est, conformément aux idées de Hertz, le courant de convection.

Dans l'exposé de la théorie de Lorentz, M. Pomey suit tantôt Lorentz lui-même, tantôt H. Poincaré. Il a recours à la notation vectorielle. Le principe de Hamilton fournit les équations fondamentales. Notons parmi les questions traitées : la définition du courant de polarisation dans les milieux en repos ou en mouvement, et l'intégration des équations pour le cas où le mouvement des ions est supposé connu.

Malgré son caractère théorique, l'Ouvrage renferme bien des résultats directement utiles à l'ingénieur; par exemple : le calcul de la capacité et de la self-induction d'un système de deux fils; celui de la résistance d'un fil parcouru par des courants périodiques; la discussion du degré de précision de la méthode du pont de Wheatstone, etc. Mentionnons aussi le théorème de M. Thévenin, qui fournit la véritable signification de la résistance intérieure d'une pile. Quelques problèmes sont résolus par des procédés nouveaux : tels sont ceux qui concernent la distribution du champ électrique entre le toron et l'armature d'un câble parcouru par un courant permanent, la polarisation d'une sphère diélectrique dans un champ uniforme, l'établissement des équations relatives à un réseau de conducteurs linéaires. La propagation des discontinuités dans un champ électrostatique fournit une application des méthodes de M. Hadamard.

Digitized by Google

En résumé, le Cours de M. Pomey répond parfaitement à son objet. Sous une forme condensée, il fournit au lecteur ce qui est nécessaire pour comprendre le mécanisme de l'électricité et du magnétisme, et pour aborder avec fruit la lecture des Mémoires originaux. Il sera utilement consulté par tous ceux qui désirent connaître l'état actuel de la Science électrique.

L. LECORNU.

Digitized by Google

COURS

D'ÉLECTRICITÉ THÉORIQUE.

CHAPITRE I.

ÉLECTROSTATIQUE.

Force électrique. — Il nous faut d'abord définir les forces d'origine électrique. On reconnaît qu'un corps est électrisé à certains caractères constants tels que l'attraction des corps légers, l'extrême sensibilité à l'approche des corps métalliques, etc.

Mais en Physique, chaque fois qu'apparaît un phénomène nouveau, la définition précise de la force nouvelle à laquelle on a affaire résulte de l'application de la règle du parallélogramme des forces, qui n'est pas démontrable *a priori*. Nous constatons, par exemple, qu'un corps est en équilibre sous l'action d'un certain nombre de forces dont quelques-unes au moins, sinon toutes, nous sont connues; avec ces forces connues, nous construirons le polygone des forces : si ce polygone n'est pas fermé, nous le fermerons en introduisant une force fictive qui définira, d'une façon précise, la force nouvelle caractérisant le phénomène nouveau.

Le rôle du physicien consistera à écarter, autant que possible, les phénomènes parasites et à s'efforcer d'obtenir un phénomène pur.

Par exemple, considérons un petit pendule métallique de masse m, suspendu par un fil de soie; nous savons déjà qu'il est soumis à un certain nombre de forces; soit, en particulier, la pesanteur $X_1 Y_1 Z_1$, la tension du fil $X_2 Y_2 X_2$ et la force d'inertie $-m \frac{d^2x}{dt^2} \cdots$; ces trois forces satisfont à chaque instant à des équations telles que

$$X_1 + X_2 - m \frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Digitized by Google

Mais frottons-le avec une peau de chat; l'équation précédente ne sera plus satisfaite, et la force X_3 que nous devrons introduire pour que $X_1 + X_2 + X_3 - m\frac{d^2x}{dt^2}$ soit nul, définira précisément la composante de la nouvelle force à laquelle le petit pendule aura été soumis. (L'étude détaillée des forces est exposée dans la *Thermodynamique*, de Jean Perrin.)

Exploration du champ électrique. — 1° *Définition de l'intensité du champ électrique et de la quantité d'électricité.* — La notion de force électrique étant ainsi acquise, considérons un champ électrique et portons-y un petit pendule électrisé A que nous placerons successivement aux différents points M_1, M_2, M_3. Ce petit pendule sera soumis aux forces f_1, f_2, f_3 d'origine électrique; aux mêmes points, portons un autre petit pendule électrisé A', nous constaterons que ce petit pendule y sera soumis aux forces électriques f'_1, f'_2, f'_3; un troisième petit corps d'épreuve A'' serait soumis, aux mêmes points, aux forces f''_1, f''_2, f''_3, etc.

Nous pouvons dresser de ces forces un Tableau à double entrée et comparer ces forces entre elles soit par lignes, soit par colonnes :

	M_1	M_2	M_3	
A	f_1	f_2	f_3	e'
A'	f'_1	f'_2	f'_3	e''
A''	f''_1	f''_2	f''_3	e'''
	E_1	E_2	E_3	

Nous constatons que les nombres correspondants de deux lignes quelconques sont proportionnels; par exemple, on a

$$\frac{f'_1}{f_1} = \frac{f'_2}{f_2} = \frac{f'_3}{f_3}.$$

Les nombres correspondants des différentes lignes sont donc proportionnels à des quantités e', e'', e''' (dont l'une est arbitraire), qui sont indépendantes du point où l'on considère le champ, qui ne dépendent que de l'état d'électrisation des corps d'épreuve et sont, par suite, des coefficients d'influence propres à ces corps d'épreuve.

De même, nous constatons que les nombres correspondants des différentes colonnes sont proportionnels à des nombres E_1, E_2, E_3

Digitized by Google

dont l'un est arbitraire, qui sont indépendants du corps d'épreuve employé et qui ne dépendent que du point où l'on considère le champ.

Les nombres E_1, E_2, E_3 représentent donc l'intensité aux points M_1, M_2, M_3 et les quantités e', e'', e''' sont les quantités d'électricité qui chargent les différents corps d'épreuve promenés dans le champ. En choisissant convenablement les quantités e', e'', e''', dont l'une est arbitraire, et E_1, E_2, E_3 dont l'une aussi est arbitraire, on peut faire en sorte que $f = Ee$. En effet, par un choix convenable de E_1 et de e' on peut poser $f_1 = E_1 e'$; par suite des proportionnalités, on aura aussi $f_2 = E_2 e''$, etc.

Remarque I. — Les forces observées au point quelconque M_i ont même direction, mais elles peuvent ne pas être de même sens; si f_1 et f'_1 sont de même sens, il en sera de même de f_2 et f'_2, de f_3 et f'_3, etc. En ce cas, e et e' sont dits de même signe. Si f_1 et f'_1 sont de sens opposé, e et e' sont dits de signes contraires.

L'égalité $f = Ee$ doit être considérée comme une équation vectorielle, vérifiée en grandeur, direction et sens.

Remarque II. — Les points M_1, M_2, M_3 peuvent être situés dans des milieux isolants différents, et le rapport des grandeurs $\frac{f_i}{f'_i}$ au point quelconque M_i est indépendant de la nature du diélectrique en ce point.

Remarque III. — *Charge et quantité d'électricité.* — Nous venons de définir ce que nous entendions par quantité d'électricité; or, dans les expériences de Coulomb, ainsi que dans toute l'électrostatique, on considère la charge électrique comme indestructible, tant qu'elle demeure entourée par un isolant; ainsi, soit une charge Q communiquée à une sphère d'épreuve métallique bien isolée, si on la met en contact avec une sphère à l'état neutre de même métal et de même diamètre, on admet qu'en les séparant chacune emporte par symétrie une charge $\frac{Q}{2}$. Cela étant, quel rapport y a-t-il entre la charge et la quantité d'électricité, telle que nous l'avons définie? Portons aux points M_1, M_2, M_3 la sphère d'épreuve avec sa charge Q; nous serons amenés à lui attribuer un coefficient d'influence q dif-

Digitized by Google

férent de zéro ; portons-la en ces mêmes points, après son contact avec une sphère identique à l'état neutre, c'est-à-dire quand elle a la charge $\frac{Q}{2}$, nous serons amenés à lui attribuer le coefficient d'influence $\frac{q}{2}$. D'une façon générale, à la charge $Q + Q'$ correspond le coefficient d'influence $q + q'$; donc q qui est une fonction de Q et qui s'annule avec Q est proportionnel à Q. En résumé, la charge et la quantité d'électricité sont identiques l'une à l'autre.

Remarque IV. — Si la petite sphère d'épreuve est conductrice, elle sera soumise dans le champ à un phénomène d'influence qui fera varier la distribution de sa charge ou même créera des plages électrisées si sa charge totale est nulle ; on verra cela plus loin ; mais si le corps est petit, et si le champ est sensiblement uniforme dans son voisinage, le phénomène d'influence ne modifie pas la force observée.

Si le petit corps chargé est un diélectrique, il peut y avoir un phénomène de polarisation, qui, dans les mêmes hypothèses, sera aussi négligeable.

Quand le corps d'épreuve est suffisamment petit, il est toujours permis de considérer le champ comme uniforme dans son voisinage.

Il faut aussi supposer que la charge portée par le corps d'épreuve est assez petite pour ne pas troubler, à distance sensible, la distribution préexistante du champ ; c'est ainsi que le thermomètre doit avoir une capacité calorifique assez petite pour ne pas modifier la répartition des températures.

2° *Détail des expériences.* — On peut donner au raisonnement une forme moins abstraite. L'ensemble des expériences serait le suivant :

On porte les corps d'épreuve A, A′, A″ dans la balance de Coulomb en présence d'une sphère électrisée B. Deux corps A et A′ seront dits chargés de la même quantité d'électricité s'ils subissent une force égale de la part de la sphère B à la distance d. Faisons agir simultanément la sphère B sur les deux corps A et A′, en plaçant ces deux corps très près l'un de l'autre par rapport à la distance qui les sépare de B ; on constatera que la force exercée par B à la même distance d que précédemment sur les deux corps A et A′ liés solidairement l'un à l'autre, est la somme des forces qui s'exerçaient sur A et A′ sépa-

Digitized by Google

rément. C'est la vérification du principe de l'indépendance des effets des forces. On constatera aussi que, si les petits corps A et A′ sont métalliques et s'ils sont mis en contact, ils ne conserveront pas individuellement les mêmes charges, et cependant l'action combinée de B sur elles restera la même. C'est le principe de la conservation de la charge, appliqué au cas de la répartition de la charge entre conducteurs. On dira alors qu'un corps d'épreuve A a une charge double de la charge d'un autre corps d'épreuve A′, si à la distance d il subit de la part de B une force d'intensité double. On constate que, la mesure étant effectuée à l'époque t, elle peut être renouvelée à une époque ultérieure t' et redonne les mêmes résultats, si les corps d'épreuve sont restés au sein d'un milieu parfaitement isolant. C'est l'application du principe de la conservation de la charge dans la durée; c'est la constatation qu'il y a des isolants et c'est leur définition même.

Cette mesure de la charge électrique ne peut évidemment présenter un sens que si elle est indépendante de l'appareil de mesure choisi. Nous allons donc la renouveler en modifiant, par exemple, l'état d'électrisation de la sphère B, mais en conservant la distance d. L'expérience apprend que les nombres qui mesurent les charges des corps A, A′, A″, avec le premier état d'électrisation de la sphère B, sont proportionnels à ceux qui mesurent les charges des mêmes corps A, A′, A″ dans le nouvel état d'électrisation. La balance donnera donc les mêmes indications, si on la gradue de façon qu'elle donne, dans les deux cas, la même indication pour le corps A. Si l'on opère ainsi, on fait l'hypothèse que l'état d'électrisation du corps A n'est pas modifié par l'action plus ou moins énergique qu'il subit de la part de B; c'est encore une application du principe de la conservation de la charge. On admet que la charge est indépendante du voisinage de tout autre corps chargé. On pourrait cependant imaginer que le corps A reprît toujours la même charge, quand il reviendrait en un point déterminé, où il serait soumis aux mêmes influences électriques, mais que sa charge variât avec ces influences et que sa valeur fût par exemple multipliée, dans les autres positions qu'il occuperait, par un facteur ne dépendant que de l'état des corps extérieurs.

Mais il faut bien commencer par supposer quelque chose constant, autrement il serait impossible de définir la charge électrique. Elle ne

Digitized by Google

serait plus une propriété du corps chargé, propriété attachée au corps et le suivant partout où on le place.

La notion de charge étant acquise, nous pouvons reprendre l'expérience de la balance de Coulomb en faisant varier la distance d et lui donnant une autre valeur d_1. Il est presque évident que, si l'on porte dans la balance les mêmes corps A, A′, A″, les actions subies par ces corps seront proportionnelles à leurs charges, car il doit peu importer que l'action se trouve affaiblie par la diminution de l'électrisation de B ou par son éloignement. C'est effectivement ce que l'on constate et cette constatation donne à penser que l'action subie par un corps électrisé doit dépendre exclusivement de l'état du milieu dans son voisinage immédiat.

Il résulte de là que, si l'on veut être renseigné sur l'état du milieu, il suffit d'opérer avec un seul des corps d'épreuve, A, par exemple. Supposons que la force qu'il a subie en présence de B à la distance d, dans le premier état d'électrisation de B, soit h; que la force subie en présence de B à la même distance, dans le second état d'électrisation de B, soit h'; que la force subie à la distance d_1 soit h_1; il est clair que les forces subies dans les mêmes conditions par A′ et par A″ sont aussi proportionnelles à h, h' et h_1. Ces nombres h, h' et h_1 caractérisent donc l'intensité du champ à l'endroit où, dans chacun de ces trois cas, on a mis le corps d'épreuve.

Les forces ont d'ailleurs même direction.

Elles peuvent, d'autre part, être attractives ou répulsives. Cela établira la distinction entre les charges positives et les charges négatives.

3° *Définition du pouvoir inducteur électrique.* — Considérons maintenant une petite sphère électrisée isolée S. Cette sphère crée autour d'elle un champ électrique rayonnant, qui, à une distance r de son centre a une valeur de la forme $E_1 = \frac{M_1}{r^2}$. Transportons cette même sphère dans un autre milieu fluide; nous constatons que le champ, à la même distance r, a maintenant la valeur $E_2 = \frac{M_2}{r^2}$; dans un troisième milieu, il aurait la valeur $E_3 = \frac{M_3}{r^2}$.

Avec une autre sphère électrisée S′, les champs obtenus dans les trois milieux seraient respectivement $\frac{M'_1}{r^2}$, $\frac{M'_2}{r^2}$, $\frac{M'_3}{r^2}$; avec une troisième

Digitized by Google

sphère S″, ces champs seraient $\frac{M_1''}{r^2}$, $\frac{M_2''}{r^2}$, $\frac{M_3''}{r^2}$. Nous pouvons alors former avec les M un Tableau à double entrée et comparer entre eux les nombres de ce Tableau, soit par lignes, soit par colonnes :

S	M_1	M_2	M_3	e_1
S′	M_1'	M_2'	M_3'	e_2
S″	M_1''	M_2''	M_3''	e_3
	$\frac{1}{K_1}$	$\frac{1}{K_2}$	$\frac{1}{K_3}$	

On constate que les nombres correspondants des différentes lignes sont proportionnels à des quantités e_1, e_2, e_3, qui, étant indépendantes du milieu dans lequel on fait l'observation, caractérisent l'état de charge des différentes sphères.

Les nombres correspondants des différentes colonnes sont proportionnels à des quantités $\frac{1}{K_1}$, $\frac{1}{K_2}$, $\frac{1}{K_3}$ qui, ne dépendant pas de la sphère électrisée employée, sont caractéristiques du milieu dans lequel on fait l'observation. Les quantités K_1, K_2, K_3 sont les pouvoirs inducteurs spécifiques des milieux. En choisissant convenablement les quantités e_1 et K_1 qui sont arbitraires, on voit que l'on pourra écrire $M_1 = \frac{e_1}{K_1}$ et par suite, d'une façon générale, $M_i = \frac{e_i}{K_i}$.

Il est bon de remarquer que nous n'avons pas vu ce qui se passe dans les corps solides métalliques ou diélectriques; nous y reviendrons plus loin.

Par l'analyse précédente, nous avons été amenés à définir deux sortes de quantités d'électricité : les quantités e', e'', e''' qui caractérisent les sphères d'épreuve en tant que corps électrisés subissant une action et les quantités e_1, e_2, e_3 caractérisant les sphères électrisées en tant que produisant un champ électrique. Un même corps a donc deux coefficients d'influence électriques : un premier, $e_{(i)}$, quand il subit l'action d'un champ; un second, $e^{(i)}$, quand il produit un champ. Il doit exister une relation entre ces deux quantités; pour la trouver, nous allons recourir au principe de l'égalité de l'action et de la réaction.

Considérons deux petites sphères électrisées placées à la distance r : la première caractérisée par les quantités e', e_1, la deuxième par les quantités e'', e_2. La première sphère exerce à distance r un champ $\frac{M_1}{r^2}$

Digitized by Google

qui, agissant sur la seconde, donne la force $\frac{M_1}{r^2} e''$. La seconde exerce à distance r le champ $\frac{M'_1}{r^2}$ qui, agissant sur la première, donne la force $\frac{M'_1}{r^2} e'$.

D'après le principe de l'égalité de l'action et de la réaction, on doit avoir

$$\frac{M_1}{r^2} e'' = \frac{M'_1}{r^2} e'.$$

Mais

$$M_1 = \frac{1}{K_1} e_1, \qquad M'_1 = \frac{1}{K_1} e_2;$$

d'où

$$e_1 e'' = e_2 e', \qquad \frac{e_1}{e'} = \frac{e_2}{e''} = \lambda.$$

Donc les coefficients qui caractérisent une sphère électrisée, soit en tant que subissant une action, soit en tant qu'exerçant une action, sont proportionnels.

D'ailleurs, la valeur commune λ des rapports étant égale à $\frac{e_1}{e'}$ ne dépend pas de la seconde sphère, et elle ne dépend pas non plus de la première, comme étant égale à $\frac{e_2}{e''}$; c'est donc une constante numérique et, par un choix convenable d'unités, on peut prendre $e' = e_1$, $e'' = e_2$.

La quantité e_1 est le coefficient qui demeure attaché à la sphère chargée quand on la fait passer d'un milieu dans un autre, et c'est l'expérience qui nous apprend que la charge se conserve pendant cette opération; on dit alors que le milieu est isolant. Cette quantité e_1 représente donc la charge électrique. Au contraire, les quantités M_1, M_2, M_3 qui correspondent à la même sphère varient suivant le milieu; ces quantités, dont dépend la loi d'action à distance, ne sont autres que les masses électriques.

La masse varie donc avec le milieu, tandis que la charge se conserve. On trouve dans certains Ouvrages la même distinction à l'aide des termes : électricité libre, électricité vraie; fluide inducteur, électricité.

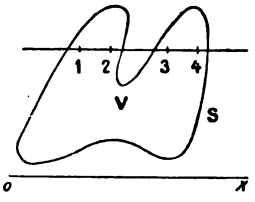
Définition mathématique de la quantité d'électricité existant à l'intérieur d'une surface fermée S. — *Transformation d'une intégrale*

Digitized by Google

de surface en intégrale de volume. — Rappelons maintenant, d'une façon sommaire et sans nous appesantir sur les questions de connexité et de discontinuité, la formule permettant de transformer une intégrale de volume en une intégrale de surface, formule qui nous sera utile par la suite.

Si S (*fig.* 1) est la surface entourant le volume simplement

Fig. 1.



connexe V; (X, Y, Z) les composantes d'un vecteur fini et continu ainsi que ses dérivées partielles en chaque point (x, y, z) du volume V; l, m, n les cosinus directeurs de la normale ν à la surface S dirigée vers l'intérieur du volume V, je dis qu'on a

$$\int\int\int_{V}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz+\int\int_{S}(lX+mY+nZ)\,dS=0.$$

En effet, considérons l'intégrale

$$\int\int\int_{V}\frac{\partial X}{\partial x}\,dx\,dy\,dz=\int\int dz\,dy\int\frac{\partial X}{\partial x}\,dx.$$

Or on a

$$\int\frac{\partial X}{\partial x}\,dx=X_2-X_1+X_4-X_3,$$

en appelant X_1, X_2, X_3, X_4 les valeurs de X aux points de rencontre successifs 1, 2, 3, 4 de la surface avec une parallèle dirigée suivant Ox et passant par l'élément $dy\,dz$ considéré, les X correspondant à des points d'entrée étant affectés du signe —, et les X des points de sortie, du signe +.

Soit dS la valeur absolue de l'élément superficiel. Au point 1, on a, en grandeur et en signe,

$$l_1\,dS=dy\,dz,$$

puisque l'angle des Ox et de la normale intérieure est nécessaire-

Digitized by Google

ment inférieur à 90°. Au point 2, l'angle de l'axe des x avec la normale inférieure étant obtus, on a

$$l_2\, dS = -\, dy\, dz.$$

Il résulte de là que

$$\int\int (X_2 - X_1 + X_4 - X_3)\, dz\, dy = -\int_S l X\, dS.$$

Donc

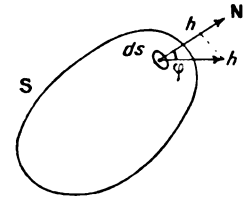
$$\int\int\int_V \frac{\partial X}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = -\int_S l X\, dS.$$

Pour démontrer la formule, il suffit d'ajouter membre à membre les équations semblables relatives aux trois axes des coordonnées.

Expression mathématique de la quantité d'électricité. — Considérons un champ électrique dans un milieu dont le pouvoir inducteur spécifique peut être variable en chaque point (K sera alors une fonction des coordonnées x, y, z).

Nous définirons la quantité d'électricité contenue à l'intérieur d'une surface fermée S par l'expression $\int_S \frac{K E_n}{4\pi}\, dS$ dans laquelle E_n désigne la composante du champ suivant la normale extérieure à la surface. Il est bon de montrer que cette intégrale a un sens qui

Fig. 2.



concorde avec la définition habituelle de la quantité d'électricité dans un milieu homogène.

Considérons donc un milieu homogène (K = const.) et une masse punctiforme M (*fig.* 3) à l'intérieur d'une surface fermée S. Cette masse M donne à distance r un champ égal à $\frac{M}{r^2}$. Or on a

$$E_n = \frac{M}{r^2}\cos\varphi,$$

Digitized by Google

en appelant φ l'angle de la normale extérieure avec le rayon vecteur r. Soit $d\omega$ l'angle solide sous lequel de M on voit l'élément dS, on aura

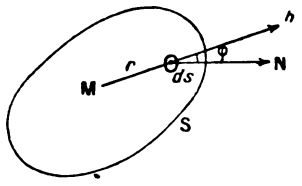
$$\int_S \frac{KE_n}{4\pi} dS = \int_S \frac{K}{4\pi} \frac{M}{r^2} \cos\varphi \, dS = \int_S \frac{KM}{4\pi} d\omega.$$

La valeur de cette intégrale est donc

$$KM = e.$$

On aurait pu tout aussi bien considérer plusieurs masses punctiformes; il aurait suffi de se rappeler que la composante normale de

Fig. 3.



la résultante est la somme des projections normales des composantes. La démonstration s'ensuit immédiatement.

Transformons l'intégrale de surface définissant la quantité d'électricité en intégrale de volume (P, Q, R composantes du champ; l, m, n cosinus directeurs de la normale extérieure à la surface S) :

$$\int_S \frac{KE_n}{4\pi} dS = \int_S \frac{K(lP + mQ + nR)}{4\pi} dS = \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{\partial KP}{\partial x} + \frac{\partial KQ}{\partial y} + \frac{\partial KR}{\partial z} \right) d\varpi.$$

Si donc je désigne par $e d\varpi$ la quantité d'électricité contenue à l'intérieur de l'élément de volume $d\varpi$, j'aurai

$$\frac{\partial KP}{\partial x} + \frac{\partial KQ}{\partial y} + \frac{\partial KR}{\partial z} = 4\pi e;$$

e est la densité volumétrique de la quantité d'électricité.

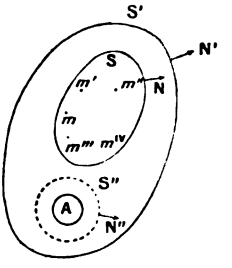
Principe de la conservation de l'électricité. — Quand on déplace une petite sphère électrisée dans un milieu isolant, on constate qu'elle conserve sa charge, et que le milieu isolant, s'il n'avait pas de charge au début, reste non chargé. Si l'on examine un corps métallique placé dans un milieu isolant, la charge totale qu'il peut pos-

Digitized by Google

séder demeure de même invariable, il suffit, pour s'en convaincre, de se placer assez loin de lui pour qu'il puisse être considéré lui-même, quelle que soit sa grandeur absolue, comme un petit corps d'épreuve. S'il n'avait pas de charge, il demeure sans charge :

1° Si j'entoure tous les corps chargés, d'une surface S (*fig.* 4) et

Fig. 4.



celle-ci d'une autre surface S', il résulte de la propriété $e = 0$ dans le volume dénué de charges compris entre les deux surfaces, que l'on a

$$\int_S \frac{KE_n}{4\pi}\, dS = \int_{S'} \frac{KE_{n'}}{4\pi}\, dS,$$

c'est-à-dire que la définition de la quantité d'électricité incluse dans une surface S est indépendante de la forme de la surface d'intégration S' particulière que l'on aura choisie pour évaluer ladite quantité.

2° Si dans le volume compris entre S et S' se trouve un corps métallique, entourons-le d'une surface S''. Si l'on avait

$$\int_{S''} \frac{KE_{n''}}{4\pi}\, dS = 0,$$

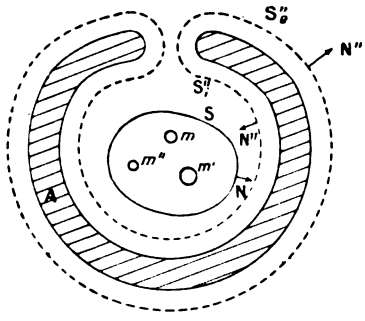
pour la surface S'', lorsque les masses m, m', m'', ..., étaient reléguées à une distance infinie, on continuera à avoir la même égalité quand elles auront été portées aux emplacements où nous venons de les considérer dans la surface S.

3° Supposons que le conducteur A soit un corps creux percé d'une ouverture très petite (*fig.* 5), entourons-le d'une surface S'' composée de deux parties, l'une S''_e infiniment voisine de sa surface externe, l'autre S''_i infiniment voisine de sa surface interne ; supposons

Digitized by Google

qu'on introduise dans la cavité des charges m, m', m'', on aura pour la mesure de leur somme $\int_S \frac{KE_n}{4\pi} dS$, S étant une surface fermée les

Fig. 5.



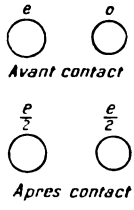
englobant. Mais on pourra écrire sensiblement à la place $-\int_{S''_i} \frac{KE_n}{4\pi} dS$, puisque cette surface S''_i est presque fermée et que le champ reste fini dans le voisinage de l'ouverture. Or, on a

$$\int_{S''_i} + \int_{S''_e} = 0.$$

Donc la charge totale intérieure a pour mesure $\int_{S''_e}$.

4° Si les corps m, m', m'' sont métalliques, et qu'on les mette en contact avec la paroi interne du conducteur A, on constatera, quand

Fig. 6.



on les retirera du corps creux, qu'ils ne sont plus chargés, mais $\int_{S''_e}$ conservent toujours la même valeur qu'avant le contact (*fig.* 6).

Cylindre de Faraday. — Pour mesurer pratiquement les quantités

Digitized by Google

d'électricité, on se sert du cylindre de Faraday, dont on relie la surface extérieure à l'aiguille d'un électromètre à cadrans; les cadrans sont chargés eux-mêmes par une pile, qui crée entre eux un champ électrostatique stable.

La justification de l'emploi de ce dispositif repose sur les remarques que nous venons de faire au sujet du corps conducteur creux.

Il faudrait montrer cependant que le problème de la distribution n'a qu'une solution, ce qui est bien évident au point de vue physique; puis, que la charge de l'aiguille seule est proportionnelle à la charge totale prise par la surface extérieure S_e'', qui comprend, ici, la surface extérieure du cylindre et la surface de l'aiguille. Ces propriétés résultent de l'examen du problème de la distribution électrostatique sur les corps conducteurs, dont on parlera plus loin.

L'aiguille, ainsi chargée proportionnellement à la charge introduite dans le cylindre de Faraday, se comporte dans le champ électrostatique existant entre les cadrans comme un petit corps d'épreuve; elle y subit une action mesurée par la torsion du fil de suspension.

Remarque. — Il faut avoir soin de protéger le cylindre de Faraday et les fils de communication contre toute influence extérieure, en les entourant eux-mêmes d'une enveloppe métallique.

L'emploi du cylindre de Faraday est le procédé le plus commode et le plus rigoureux pour vérifier la loi de la conservation de l'électricité.

D'une façon générale, si plusieurs corps chargés sont métalliques, et qu'ils viennent en contact, puis qu'on les sépare, on constatera que la charge totale est restée la même, en dépit des variations de leurs charges individuelles. C'est le principe de la conservation de la charge. C'est là une donnée expérimentale.

Théorie des actions a distance. — Nous allons maintenant supposer le milieu homogène. Nous aurons pour valeur de ρ, densité de masse électrique,

$$4\pi\rho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Nous allons maintenant définir un certain nombre de quantités qui interviendront dans le théorème de Vaschy et les interpréter :

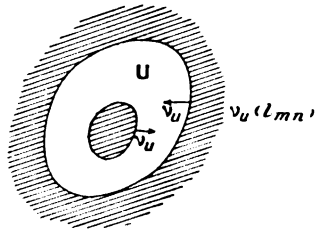
Digitized by Google

d'abord la densité superficielle σ est définie par la formule

$$4\pi\sigma = lX + mY + nZ$$

[l, m, n cosinus directeurs de la normale ν_u à la surface qui limite

Fig. 7.



le volume considéré U (*fig.* 7), dirigée vers l'intérieur de ce volume].

Puis les vecteurs μ et τ sont définis par les formules

$$\begin{aligned}
4\pi\mu_x &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},\\
4\pi\mu_y &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},\\
4\pi\mu_z &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x};\\
4\pi\tau_x &= nY - mZ,\\
4\pi\tau_y &= lZ - nX,\\
4\pi\tau_z &= mX - lY.
\end{aligned}$$

Sens du vecteur μ. — Le vecteur μ représente une masse vectorielle, nulle seulement dans les champs où il y a un potentiel.

Considérons (*fig.* 8) l'intégrale $\int\int \frac{\partial X}{\partial y}\,dxdy$, on aura

$$\int\int \frac{\partial X}{\partial y}\,dy\,dx = \int dx(X_1 - X_2) = \int_C X\,dx$$

(en affectant dx, dans l'intégrale curviligne, d'un signe défini par le sens de circulation choisi sur la courbe C, sens positif lorsque la description du contour C s'effectue en laissant l'aire à gauche, pour un observateur placé parallèlement à Oz les pieds sur le plan yOx, la tête

Digitized by Google

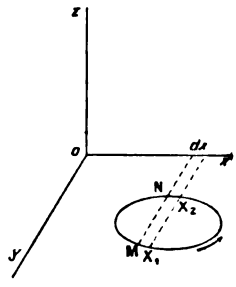
vers z) ; on aurait de même

$$\int\int \frac{\partial Y}{\partial x}\, dx\, dy = -\int_C Y\, dy;$$

donc

$$\int\int \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dx\, dy = \int_C (X\, dx + Y\, dy).$$

Fig. 8.



Le signe de μ_z en vertu de l'identité

$$\int\int \mu_z\, dx\, dy = \frac{1}{4\pi}\int_C (X\, dx + Y\, dy)$$

se rattache donc au sens de description du contour C.

Remarque. — La quantité μ_z est une fonction de xyz. Considérons une surface Σ, sur laquelle nous distinguerons, comme on peut communément le faire, une face positive et une face négative. Soit PN la normale en un point P à la face positive; soit K un petit contour délimitant un élément de surface dS et entourant le point P; soient l, m, n les cosinus directeurs de PN. Envisageons l'intégrale

$$\int \frac{\partial X}{\partial y}\, n\, d\mathrm{S}.$$

Nous dirons que cette intégrale est prise sur la face positive. Nous admettrons qu'un mobile décrit le contour K dans le sens positif, quand un observateur debout sur la face positive et placé suivant PN le voit tourner de droite à gauche; le sens positif de description du contour C s'obtient en amenant le contour K à être tangent intérieurement au contour; les sens sont les mêmes au point de contact sur K et sur C; quand le mobile décrit C dans le sens direct, on dira que sa

Digitized by Google

projection sur le plan des xy décrit C également dans le sens direct. On a donc

$$\int \frac{\partial X}{\partial y} n \, dS = \int_C X \, dx.$$

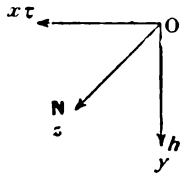
Si, au lieu de prendre l'intégrale sur la face positive, on la prend sur la face négative, il faut remplacer n par $-n$. Mais, en même temps, le sens de description du contour C est inversé, de sorte que la formule subsiste.

Dans le système d'axes adopté, l'observateur placé suivant Oz, debout sur le plan des xy, voit Oy à droite de Ox. Si l'on avait adopté, pour axes de référence, un trièdre de signe contraire, le sens positif de description du contour C eût été inversé. En ce cas, on aurait

$$\int \frac{\partial X}{\partial y} n \, dS = -\int_C X \, dx.$$

Sens du vecteur τ. — Le vecteur τ est perpendiculaire à la fois (*fig.* 9)

Fig. 9.



à la normale à la surface (cosinus directeurs : l, m, n) et au vecteur X, Y, Z, puisqu'on a

$$l\tau_x + m\tau_y + n\tau_z = 0,$$
$$X\tau_x + Y\tau_y + Z\tau_z = 0.$$

Pour déterminer le sens qu'il faut prendre sur la direction ainsi définie, considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} 4\pi\tau_x & 4\pi\tau_y & 4\pi\tau_z \\ X & Y & Z \\ l & m & n \end{vmatrix}.$$

Il est positif comme égal à $(4\pi\tau)^2$ et il ne peut s'annuler tant que les directions (XYZ), (lmn) ne deviennent pas parallèles. Déformons le trièdre (τ, h, N) en évitant cette singularité. Amenons la normale N

Digitized by Google

suivant Oz, le vecteur h vers Oy. On aura

$$4\pi\tau_x = n\mathrm{Y};$$

le déterminant étant demeuré positif et se réduisant à $4\pi\tau_x n\mathrm{Y}$, il faut, n et Y étant positifs, que τ_x soit positif. Donc τ sera dirigé vers Ox. Cela définit le côté du plan N,h où demeure la direction positive de τ.

Interprétation cinématique. — La quantité $4\pi\rho = \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z}$ s'appelle la *divergence* du vecteur (X, Y, Z) et le vecteur $4\pi\mu$ s'appelle le *tourbillon* du vecteur (X, Y, Z). Ces désignations sont empruntées à la cinématique des milieux continus.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point d'un milieu continu et x', y', z' ses nouvelles coordonnées à la suite d'un déplacement défini par

$$\begin{aligned} x' &= x + u, \\ y' &= y + v, \\ z' &= z + w, \end{aligned}$$

u, v, w étant des fonctions de x, y, z. Considérons des points dans le voisinage du point (x, y, z) et voyons comment ces points se grouperont maintenant autour du point (x', y', z'). Nous avons

$$\begin{aligned} dx' &= dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz, \\ dy' &= dy + \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy + \frac{\partial v}{\partial z}\,dz, \\ dz' &= dz + \frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \frac{\partial w}{\partial y}\,dy + \frac{\partial w}{\partial z}\,dz. \end{aligned}$$

Nous supposons le déplacement infiniment petit de sorte que u, v, w sont des quantités infiniment petites. La déformation dépend donc des quantités $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \cdots$; supposons-les aussi infiniment petites; dx', dy', dz' sont reliés à dx, dy, dz par des formules de transformation linéaires.

Considérons (*fig.* 10) un tétraèdre ayant pour sommets (x, y, z), $1\,(x + dx_1,\ y + dy_1,\ z + dz_1)$, $2\,(x + dx_2,\ y + dy_2,\ z + dz_2)$, $3\,(x + dx_3, y + dy_3, z + dz_3)$.

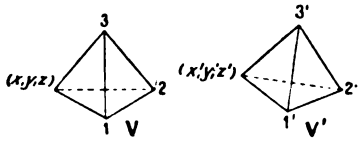
Digitized by Google

Le volume de ce tétraèdre est V

$$6V = \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ dy_1 & dy_2 & dy_3 \\ dz_1 & dz_2 & dz_3 \end{vmatrix}.$$

Après le déplacement les sommets de ce tétraèdre sont venus en

Fig. 10.



(x', y', z') $1'$, $2'$, $3'$ et le volume du tétraèdre est devenu $V' = V \times \Delta$, Δ étant le déterminant de la substitution linéaire

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = 1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

(en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier).

L'expression $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$, qui est la divergence du déplacement (u, v, w), représente donc la dilatation du milieu.

L'expression précédente de dx' peut s'écrire

$$dx' = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dy + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) dy - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) dz.$$

Donc

$$dx' = dx + p_3\, dy - p_2\, dz + \varepsilon_1\, dx + \frac{1}{2}\gamma_3\, dy + \frac{1}{2}\gamma_2\, dz,$$

$$dy' = dy + p_1\, dz - p_3\, dx + \frac{1}{2}\gamma_3\, dx + \varepsilon_2\, dy + \frac{1}{2}\gamma_1\, dz,$$

$$dz' = dz + p_2\, dx - p_1\, dy + \frac{1}{2}\gamma_2\, dx + \frac{1}{2}\gamma_1\, dy + \varepsilon_3\, dz,$$

Digitized by Google

en posant

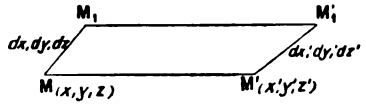
$$p_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right), \qquad p_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right), \qquad p_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \varepsilon_3 = \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \gamma_2 = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad \gamma_3 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Le vecteur $M'M'_1$ peut s'obtenir par trois opérations successives (*fig.* 11) : 1° une translation $MM_1(dx, dy, dz)$; 2° une rotation

Fig. 11.



définie par le vecteur (p_1, p_2, p_3) et 3° une déformation définie par des formules linéaires de transformation où les coefficients symétriques par rapport à la diagonale principale sont égaux, ce qui caractérise une déformation pure. Le vecteur $4\pi\mu$ coïncidera donc avec la rotation $(2p_1, 2p_2, 2p_3)$ si le vecteur X, Y, Z représente le déplacement MM'.

Lemme préliminaire au théorème de Vaschy. — Considérons deux vecteurs $h(X, Y, Z)$ et $h'(X', Y', Z')$ et l'ensemble des quantités ou vecteurs définis précédemment $\rho, \mu, \sigma, \tau, \rho', \mu', \sigma', \tau'$.

$$4\pi\rho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}, \qquad 4\pi\rho' = \frac{\partial X'}{\partial x} + \frac{\partial Y'}{\partial y} + \frac{\partial Z'}{\partial z},$$

$$4\pi\mu_x = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \qquad 4\pi\mu'_x = \frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y},$$

$$4\pi\mu_y = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \qquad 4\pi\mu'_y = \frac{\partial Z'}{\partial x} - \frac{\partial X'}{\partial z},$$

$$4\pi\mu_z = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}, \qquad 4\pi\mu'_z = \frac{\partial X'}{\partial y} - \frac{\partial Y'}{\partial x},$$

$$4\pi\sigma = lX + mY + nZ, \qquad 4\pi\sigma' = lX' + mY' + nZ',$$

$$4\pi\tau_x = nY - mZ, \qquad 4\pi\tau'_x = nY' - mZ',$$

$$4\pi\tau_y = lZ - nX, \qquad 4\pi\tau'_y = lZ' - nX',$$

$$4\pi\tau_z = mX - lY, \qquad 4\pi\tau'_z = mX' - lY'.$$

Digitized by Google

Nous supposons les quantités précédentes définies à l'intérieur d'un volume U limité par une surface S. Nous admettons qu'elles sont finies et bien déterminées. Je dis qu'on a l'identité

$$\begin{aligned}\int_U (X\rho' + Y\mu'_z - Z\mu'_y)\,d\varpi + \int_U (X'\rho + Y'\mu_z - Z'\mu_y)\,d\varpi \\ = -\int_S (X\sigma' + Y\tau'_z - Z\tau'_y)\,dS \\ = -\int_S (X'\sigma + Y'\tau_z - Z'\tau_y)\,dS,\end{aligned}$$

en désignant par $d\varpi$ l'élément de volume et par dS l'élément de surface.

En effet

$$\begin{aligned}X'\sigma + Y'\tau_z - Z'\tau_y &= \frac{1}{4\pi}[X'(lX + mY + nZ) + Y'(mX - lY) - Z'(lZ - nX)] \\ &= \frac{1}{4\pi}[l(XX' - YY' - ZZ') + m(X'Y + Y'X) + n(X'Z + Z'X)].\end{aligned}$$

Cette expression ne change pas quand on permute X et X', Y et Y', Z et Z'; donc $X\sigma' + Y\tau'_z - Z\tau'_y$ est égal à la même quantité. Les deux intégrales de surface peuvent donc se remplacer par l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi}\int_S [l(XX' - YY' - ZZ') + m(X'Y + Y'X) + n(X'Z + Z'X)]\,dS.$$

L'intégrale de volume, équivalente à cette intégrale de surface au signe près, se déduit de celle-là en remplaçant l, m, n par les symboles $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$; dS par $d\varpi$ et S par U. Or les expressions de ρ et de μ se déduisent des expressions de σ et τ par la même substitution; la formule est donc ainsi démontrée.

Théorème de Vaschy. — Supposons que le champ X', Y', Z' soit dû à une masse égale à 1 située en un point (α, β, γ) et agissant suivant la loi de Newton ou pour mieux dire de Coulomb. Si, en effet, nous appelons (x, y, z) les coordonnées du point où l'on considère le vecteur (X'Y'Z'), nous admettrons que ce vecteur est dirigé suivant la droite r qui va du point $(\alpha\beta\gamma)$ au point (xyz). Le champ dérive

Digitized by Google

du potentiel $V = \frac{1}{r}$. Donc

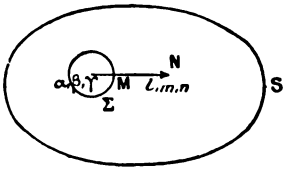
$$X' = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x},$$

$$Y' = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y},$$

$$Z' = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}.$$

Excluons (*fig.* 12) du volume U le point α, β, γ, en l'entourant

Fig. 12.



d'une petite sphère Σ ayant ce point pour centre. Dans le volume U on a $\operatorname{div} \frac{1}{r} = 0$, c'est-à-dire $\rho' = 0$. Le champ dérivant d'un potentiel $\mu' = 0$. Le vecteur $(X'Y'Z')$ étant dirigé suivant le rayon, on a

$$\frac{X'}{l} = \frac{Y'}{m} = \frac{Z'}{n}.$$

Donc $\tau' = 0$ sur la surface Σ. Enfin $4\pi\sigma' = h_n = \frac{1}{r^2}$ sur la sphère Σ. La formule se réduit donc à

$$\int_U (X'\rho + Y'\mu_z - Z'\mu_y)\, d\varpi + \int_S (X'\sigma + Y'\tau_z - Z'\tau_y)\, dS = -\int_\Sigma X\sigma'\, dS.$$

Nous exprimons ainsi l'intégrale de surface du lemme en fonction de σ et de τ sur la surface S et en fonction de σ' et de τ' sur la surface Σ.

Mais quand la sphère Σ diminue indéfiniment de diamètre, X tend vers la valeur $X_{\alpha\beta\gamma}$ qu'il possède au centre de cette sphère, et l'intégrale se réduit à $X_{\alpha\beta\gamma}$. On a, en effet,

$$\lim \int_\Sigma X\sigma'\, dS = \lim \int_\Sigma X \frac{dS}{4\pi r^2} = X_{\alpha\beta\gamma}.$$

Digitized by Google

Quand la sphère décroît, le volume d'intégration tend aussi vers U. Il vient donc

$$X_{\alpha\beta\gamma} + \int_U (X'\rho + Y'\mu_z - Z'\mu_y)\, d\varpi + \int_S (X'\sigma + Y'\tau_z - Z'\tau_y)\, dS = 0,$$

ou, en remplaçant X'; Y', Z' par leurs valeurs,

$$X_{\alpha\beta\gamma} = \int_U \left(\rho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mu_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \mu_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\varpi + \int_S \left(\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \tau_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \tau_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dS,$$

et deux autres formules analogues pour Y et Z.

Telles sont les formules de Vaschy. Elles expriment qu'un champ quelconque peut toujours être considéré comme dû à des masses $\rho d\varpi$ et σdS agissant suivant la loi de Newton, et à des masses vectorielles $\mu d\varpi$ et τdS agissant suivant la loi de Laplace.

Remarque. — Supposons qu'à l'intérieur du volume U les fonctions X, Y, Z éprouvent une discontinuité au passage d'une surface (s) limitée par un contour fermé (c); il est facile de voir comment on peut étendre à ce cas le théorème de Vaschy. Les deux faces de la surface (s) peuvent être considérées comme enfermant à leur intérieur un volume de capacité nulle, qu'on aura à retrancher du volume U; en revanche, il faudra adjoindre à la surface S, qui limite le volume d'intégration, les deux faces de (s). En un même point P de (s), la fonction X, par exemple, aura la valeur X_1 dans l'intégrale relative à une face, et la valeur X_2 dans l'intégrale relative à l'autre face. Si, de plus, les cosinus directeurs de la normale à la première face, dirigée vers l'intérieur du volume U_1, sont l_1, m_1, n_1, ceux de la normale à la seconde face seront $-l_1$, $-m_1$, $-n_1$.

La surface extérieure, elle-même, peut être regardée comme une surface de discontinuité au delà de laquelle on a partout

$$X = Y = Z = 0.$$

Sur la face 1 de la surface de discontinuité (s), on a

$$\begin{aligned} 4\pi\sigma &= l_1 X_1 + m_1 Y_1 + n_1 Z_1, \\ 4\pi\tau_x &= n_1 Y_1 - m_1 Z_1, \\ 4\pi\tau_y &= l_1 Z_1 - n_1 X_1, \\ 4\pi\tau_z &= m_1 X_1 - l_1 Y_1 \end{aligned}$$

Digitized by Google

et sur la face 2 de ladite surface on a, au même point,

$$\begin{aligned} 4\pi\sigma &= -l_1 X_2 - m_1 Z_2 - n_1 Z_2, \\ 4\pi\tau_x &= -n_1 Y_2 + m_1 Y_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Si donc nous réunissons, en un seul terme, les deux termes de l'intégrale de surface qui se rapportent à un même point de la surface de discontinuité, on devra poser

$$\begin{aligned} 4\pi\sigma &= l_1(X_1 - X_2) + m_1(Y_1 - Y_2) + n_1(Z_1 - Z_2), \\ 4\pi\tau_x &= n_1(Y_1 - Y_2) - m_1(Z_1 - Z_2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

σ et τ sont alors bien déterminés en chaque point.

Application du théorème de Vaschy au cas où le point $(\alpha\beta\gamma)$ se trouve sur une surface de discontinuité. — Nous entourons toujours le point $(\alpha\beta\gamma)$ d'une petite sphère de garde, dont ce point occupe le centre. Le volume U se trouve ainsi décomposé en un volume U', extérieur à la sphère de garde, et en deux volumes U_1 et U_2 de part et d'autre de la surface de discontinuité (s); U_1 et U_2 sont sensiblement deux demi-sphères; de même, la surface d'intégration S se trouve décomposée en trois parties : la première S' comprend les diverses portions de la surface d'intégration qui sont extérieures à la sphère de garde; la seconde S_1 est sensiblement un hémisphère entourant U_1; la troisième S_2 est sensiblement l'autre hémisphère entourant U_2. En reprenant la démonstration du théorème de Vaschy, on voit immédiatement, en appelant X_1, la valeur de X en $(\alpha\beta\gamma)$ sur la face 1 de la surface de discontinuité (s), et X_2 la valeur de X en ce même point sur la face 2, qu'on a

$$\int_{\Sigma} X\sigma'\,ds = \int_{S_1} X\sigma'\,dS + \int_{S_2} X\sigma'\,dS \sim \frac{1}{2}(X_1 + X_2),$$

Le signe $\sim$ indiquant que le second membre est la limite du premier, quand le rayon de la sphère de garde tend vers zéro. Or, dans ce cas, le volume U' s'agrandit aux dépens de U_1 et de U_2, et l'intégrale de volume tend, comme on sait, vers une limite finie et déterminée; de même, la surface S' s'agrandit aux dépens de la surface interceptée sur (s) par la sphère de garde et l'intégrale de surface

Digitized by Google

tend aussi, comme on sait, vers une valeur finie et déterminée. Si donc $\mu\rho\sigma\tau$ sont finis et déterminés, on a

$$\frac{1}{2}(X_1 + X_2) = \int_U \left(\rho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mu_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \mu_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) d\varpi + \int_S \left(\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \tau_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \tau_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dS$$

et deux autres formules analogues, relatives aux axes des y et des z.

Autre application. — Faisons maintenant $X = X'$, $Y = Y'$, $Z = Z'$; la formule devient

$$2\int_U (X\rho + Y\mu_z - Z\mu_y)\, d\varpi + \int (X\sigma + Y\tau_z - Z\tau_y)\, dS = 0.$$

Supposons que X, Y, Z soient les composantes de l'intensité d'un champ électrostatique dans un milieu homogène, où nous ferons $K = 1$, pour simplifier.

En Électrostatique, nous n'avons pas de masses vectorielles, parce qu'il y a un potentiel, donc $\mu = 0$ et l'on a

$$\int_U X\rho\, d\varpi + \frac{1}{2}\int_S (X\sigma + Y\tau_z - Z\tau_y)\, dS = 0.$$

Cette égalité exprime que la force $h\rho\, d\varpi$ exercée par le champ sur la masse $\rho\, d\varpi$ est équilibrée par une pression dont la composante suivant Ox est

$$p_x = \frac{1}{2}(X\sigma + Y\tau_z - Z\tau_y),$$

ou

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{1}{8\pi}[2X(lX + mY + nZ) - l(X^2 + Y^2 + Z^2)] \\ &= \frac{h^2}{8\pi}\left[\frac{2X}{h}\left(l\frac{X}{h} + m\frac{Y}{h} + n\frac{Z}{h}\right) - l\right] \\ &= \frac{2h^2}{8\pi}\cos(h, N)\frac{X}{h} - \frac{h^2}{8\pi}l. \end{aligned}$$

Portons (*fig.* 13) le vecteur $\frac{h^2}{8\pi}$ suivant la normale à l'élément dirigée vers l'intérieur du champ (cosinus directeurs l, m, n) en ON, et

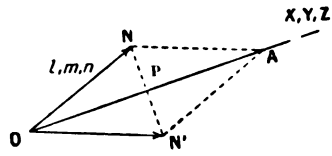
Digitized by Google

projetons ON en OP sur la direction du champ (X, Y, Z)

$$OP = \frac{h^2}{8\pi}\cos(\overline{h}, \overline{N}).$$

Prenons le point N′ symétrique du point N par rapport au champ ;

Fig. 13.



je dis que le vecteur ON′ a pour projections sur les axes p_x, p_y, p_z.

En effet, si nous prenons OA = 2OP, nous avons

$$\text{proj.}\,\overline{ON'} = \text{proj.}\,\overline{OA} + \text{proj.}\,\overline{AN'}.$$

Projetons sur Ox, il vient

$$\text{proj.}\,\overline{ON'} = 2\frac{h^2}{8\pi}\cos(\overline{h}, \overline{N})\frac{X}{h} - \frac{h^2}{8\pi}l = p_x.$$

Nous trouvons ainsi les pressions et tensions qui s'exercent dans le champ électrostatique.

Action sur un conducteur chargé. — Dans le paragraphe précédent nous venons d'obtenir l'expression des pressions et tensions qui, d'après Maxwell, existent en tout point d'un milieu diélectrique, siège d'un champ électrostatique, et dont l'action sur la surface S équilibre la résultante de translation de toutes les forces qui agissent sur les masses électriques situées dans le volume U limité par la surface S.

Supposons maintenant que le volume U soit limité par la surface d'un corps conducteur S_1 et par une surface Σ assez reculée de tout côté pour que le champ ne s'y fasse pas sentir et qu'on ait, par conséquent, X = Y = Z = 0 en tous les points de cette surface.

Nous définissons un corps conducteur comme un corps à la surface duquel, pendant l'équilibre électrostatique, le vecteur (XYZ) aboutit

Digitized by Google

normalement. La masse σ est égale à $\frac{h_n}{4\pi}$ et τ est nul. La formule

$$\int_U X\rho\, d\varpi + \frac{1}{2}\int_S (X\sigma + Y\tau_z - Z\tau_y)\, dS = 0$$

se réduit à

$$\int_U X\rho\, d\varpi + \frac{1}{2}\int_{S_1} X\sigma\, dS = 0,$$

car l'intégrale de surface relative à Σ disparaît. On équilibre donc les forces $X\rho\, d\varpi$ agissant sur les masses situées dans le champ par des forces $\frac{1}{2}X\sigma\, dS$ appliquées à chacun des éléments de surface du conducteur S_1.

Retour sur les tensions et pressions de Maxwell. — Considérons maintenant des masses de volume $\rho\, d\varpi$ dans le diélectrique, et des masses de surface $\sigma\, dS$ sur des conducteurs $S_1, S_2, S_3, \ldots$. Soit Σ une surface tracée dans le diélectrique et embrassant un ou plusieurs des conducteurs S_1, S_2 par exemple à son intérieur. La résultante des actions sur les masses incluses a pour composante, suivant Ox,

$$\int_U X\rho\, d\varpi + \frac{1}{2}\int_{S_1} X\sigma\, dS + \frac{1}{2}\int_{S_2} X\sigma\, dS$$

et la force agissant sur la surface Σ, et qui lui fait équilibre, aura pour composante, suivant Ox :

$$\frac{1}{2}\int_\Sigma (X\sigma + Y\tau_z - Z\tau_y)\, dS.$$

On retrouve les pressions et tensions de Maxwell. Nous les avions obtenues tout d'abord en ne considérant que des masses de volume $\rho\, d\varpi$, nous les obtenons maintenant en tenant compte également des masses $\sigma\, dS$ réparties sur les conducteurs.

Observation relative aux formules de Vaschy. — Nous voulons montrer que le premier terme $\int_U \rho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\varpi$ est bien la force due à la masse newtonienne $\rho d\varpi$ placée au point xyz sur la masse 1 placée au point $\alpha\beta\gamma$.

Digitized by Google

Rappelons qu'on a alors, en effet, pour potentiel

$$V = \Sigma \frac{m}{r} = \int \rho \frac{d\varpi}{r};$$

la force électrique au point α, β, γ, a pour composante suivant Ox

$$X = -\frac{\partial V}{\partial \alpha} = -\int \rho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \alpha} d\varpi,$$

mais

$$r = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2};$$

c'est une fonction des différences $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$; donc

$$X = +\int \rho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\varpi.$$

Nous voulons également montrer que le terme

$$\int \left(\mu_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \mu_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\varpi$$

correspond à une force agissant suivant la loi de Laplace.

Si l'on pose

$$m_x = \mu_x d\varpi, \qquad m_y = \mu_y d\varpi, \qquad m_z = \mu_z d\varpi \qquad \text{et} \qquad m = \mu d\varpi,$$

l'intégrale précédente devient

$$\sum \frac{(\beta - y) m_z - (\gamma - z) m_y}{r^3}.$$

C'est la composante suivant Ox du vecteur

$$\sum \frac{\overline{m \sin \theta}}{r^2}.$$

Le trait supérieur indique une somme géométrique.

Le vecteur

$$f = \frac{\overline{m \sin \theta}}{r^2}$$

est perpendiculaire au vecteur $m(m_x m_y m_z)$ et au vecteur $r(\alpha - x, \beta - y, \gamma - z)$; θ est l'angle compris entre ces deux vecteurs m et r;

Digitized by Google

de plus, le trièdre f, r, m a le même signe que le trièdre Ox, Oy, Oz. (Pour Oz, l'axe Ox est à gauche de Oy.)

Le vecteur f est bien égal à la force due à un élément de courant m et appliquée à un pôle unité placé en $(\alpha\beta\gamma)$, d'après la loi d'action dite de Laplace.

Autre observation. — La formule de M. Vaschy peut être légèrement transformée.

Posons

$$V = \int_U \frac{\rho\, d\varpi}{r} + \int_S \frac{\sigma\, dS}{r},$$

$$A = \int_U \frac{\mu_x\, d\varpi}{r} + \int_S \frac{\tau_x\, dS}{r},$$

$$B = \int_U \frac{\mu_y\, d\varpi}{r} + \int_S \frac{\tau_y\, dS}{r},$$

$$C = \int_U \frac{\mu_z\, d\varpi}{r} + \int_S \frac{\tau_z\, dS}{r},$$

puis remarquons qu'on a

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \alpha}, \qquad \dots$$

et que ρ, σ, μ, τ sont fonctions de xyz et non de $\alpha\beta\gamma$.

Il viendra alors

$$X_{\alpha\beta\gamma} = -\frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \gamma} - \frac{\partial C}{\partial \beta}, \qquad \dots.$$

Avec le système d'axes adopté par Maxwell, on aurait, au contraire,

$$X_{\alpha\beta\gamma} = -\frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\partial C}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \gamma}; \qquad \dots.$$

V est le potentiel newtonien; A, B, C sont les composantes du potentiel vecteur.

Champ électrostatique dans un milieu fluide. — Nous allons maintenant expliquer la propriété fondamentale du champ électrostatique : à savoir qu'il y a un potentiel.

Dire qu'il y a un potentiel, c'est dire que, si l'on fait parcourir une courbe fermée C à une quantité d'électricité suffisamment petite pour

Digitized by Google

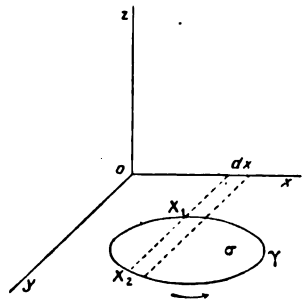
ne pas troubler la distribution du champ, l'intégrale représentant le travail effectué par la force électrique dans la description de ce contour est nulle

$$\int_C (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = 0.$$

On peut transformer cette intégrale de ligne en une intégrale de surface prise sur une surface S passant par C.

Transformation d'une intégrale de ligne en une intégrale de surface. — Rappelons à simple titre de memento l'une des très nombreuses démonstrations que l'on peut en donner.

Fig. 14.



A cet effet, considérons l'intégrale

$$\int\int_\sigma \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dx\,dy,$$

prise sur une aire σ du plan des xy (*fig.* 14). On a

$$\int\int_\sigma \frac{\partial X}{\partial y}\,dy\,dx = \int_\gamma (X_2 - X_1)\,dx = \int_\gamma X\,dx,$$

à condition de parcourir le contour γ dans le sens positif. Donc

$$\int\int_\sigma \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dx\,dy = \int_\gamma (X\,dx + Y\,dy).$$

Considérons maintenant (*fig.* 15) une petite pyramide triangulaire dont les arêtes O'A, O'B, O'C soient dirigées parallèlement aux axes des coordonnées, et appliquons cette formule successivement à chacune des trois faces rectangles, puis ajoutons membre à membre les égalités obtenues. Les intégrales de ligne prises suivant les arêtes O'A,

Digitized by Google

O'B, O'C se détruiront si les contours sont tous décrits dans le sens positif. Nous aurons dans le second membre l'intégrale

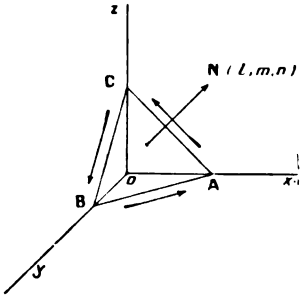
$$\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

prise le long du contour ABC, dans le sens positif. On aura donc, puisque $dxdy = nd\mathrm{S}$, ...,

$$\int_{\text{Surface}} \left[l\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + m\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + n\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right)\right] d\mathrm{S} = \int_{\text{Ligne}} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Dans cette formule, peu importe le côté de la surface sur laquelle on prend l'intégrale, car on change en même temps les signes des

Fig. 15.



cosinus directeurs l, m, n et la direction positive du sens de description du contour.

Mais si l'on remplace le système d'axes de coordonnées par un autre système, constitué par un trièdre de signe contraire, il faudra remplacer les *tourbillons*

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \dots$$

par

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \dots$$

respectivement.

Décomposons la surface S en une infinité de petits triangles décrits dans le même sens, il restera dans le second membre l'intégrale de

Digitized by Google

ligne relative au contour C et nous aurons

$$\int_S \left[l\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + m\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + n\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right)\right] dS = \int_C (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz);$$

si $\int_C$ est nul, quel que soit le contour, l'élément de l'intégrale du premier membre est nul aussi, et comme l, m, n sont arbitraires, on aura

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\mu = 0.$$

Les physiciens ont vérifié la loi de Coulomb et c'est en se basant sur elle qu'ils ont conclu à l'existence d'un potentiel ; si l'on considère au contraire *a priori* un champ dérivant d'un potentiel, on voit qu'il ne contient pas de masses laplaciennes. Inversement, si dans un champ, on a $\mu = 0$, il existe un potentiel. Mais il existe des champs électriques où il n'y a pas de potentiel.

C'est ce qui a lieu, par exemple, quand on déplace des aimants en présence d'un circuit métallique C. Il y a à la fois un champ électrique et un champ magnétique variables. Si l'on prend l'intégrale

$$\int_C X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

au temps t le long d'un circuit voisin du circuit métallique C, le résultat n'est pas égal à zéro, mais nous verrons plus tard qu'il est égal en valeur absolue à la dérivée par rapport au temps du flux d'induction magnétique.

Mais toutes les fois que μ sera nul, nous dirons que nous décrivons des phénomènes électrostatiques.

Expression de l'énergie dans le champ électrostatique. — Rappelons que $\int_S \frac{K E_n}{4\pi} dS$ représente la quantité d'électricité contenue à

Digitized by Google

l'intérieur de la surface fermée S et que par transformation de cette intégrale de surface en intégrale de volume, on obtient la densité de quantité d'électricité e

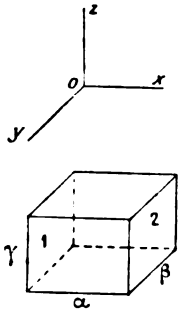
$$4\pi e = \frac{\partial KP}{\partial x} + \frac{\partial KQ}{\partial y} + \frac{\partial KR}{\partial z} \qquad \text{(formule de Poisson).}$$

C'est ici qu'intervient la loi de la conservation de la charge. Cette loi est satisfaite d'elle-même dans la théorie qui admet l'existence des deux fluides, théorie dans laquelle une molécule neutre ne peut que se scinder en deux masses de signes contraires toujours égales.

Dans notre théorie, l'électricité qui se transporte avec la sphère d'épreuve, quand on déplace celle-ci, est analogue à un fluide soumis à la condition de continuité et la loi de la conservation de l'électricité sera satisfaite si l'on exprime que la quantité d'électricité qui entre à l'intérieur d'un parallélépipède élémentaire, diminuée de la quantité d'électricité, qui en sort est égale à la variation de la quantité d'électricité contenue à l'intérieur.

Considérons donc (*fig.* 16) un parallélépipède élémentaire dont les côtés parallèles aux axes sont égaux à α, β, γ :

Fig. 16.



Dans un déplacement δx, la quantité d'électricité qui entre par la face 1 est $\beta\gamma e\,\delta x$ et celle qui en sort par la face 2 est

$$\beta\gamma\left[e\,\delta x + \frac{\partial(e\,\delta x)}{\partial x}\alpha\right].$$

La différence est $-\alpha\beta\gamma\frac{\partial}{\partial x}(e\,\delta x)$. On en déduit la variation δe :

$$\delta e = -\left[\frac{\partial}{\partial x}(e\,\delta x) + \frac{\partial}{\partial y}(e\,\delta y) + \frac{\partial}{\partial z}(e\,\delta z)\right].$$

Digitized by Google

Telle est la formule qui exprime la conservation de la charge ; δx, δy, δz y sont donc des fonctions de x, y, z.

Ceci posé, cherchons l'expression de l'accroissement d'énergie, c'est-à-dire le travail effectué contre les forces électriques quand les charges subissent un déplacement,

$$\delta W = -\int (P e\,\delta x + Q e\,\delta y + R e\,\delta z)\,d\varpi.$$

Je suppose qu'il y a un potentiel $P = -\frac{\partial V}{\partial x}, \dots$

$$\delta W = +\int \left(\frac{\partial V}{\partial x} e\,\delta x + \frac{\partial V}{\partial y} e\,\delta y + \frac{\partial V}{\partial z} e\,\delta z\right) d\varpi.$$

Or

$$\int \left(\frac{\partial V}{\partial x} e\,\delta x + \dots\right) d\varpi + \int \left[V \frac{\partial}{\partial x}(e\,\delta x) + \dots\right] d\varpi$$
$$= \int \left[\frac{\partial}{\partial x}(V e\,\delta x) + \frac{\partial}{\partial y}(V e\,\delta y) + \frac{\partial}{\partial z}(V e\,\delta z)\right] d\varpi$$
$$= \int_S (l V e\,\delta x + m V e\,\delta y + n V e\,\delta z)\,dS.$$

Cette dernière intégrale sera nulle si les charges électriques ne peuvent pas sortir du champ limité par la ou les surfaces S, car on aurait $l\delta x + m\delta y + n\delta z = 0$ en chaque point de ces surfaces ; elle sera nulle aussi à l'infini, où l'on peut admettre $V = 0$. Il reste donc

$$\delta W = -\int \left[V \frac{\partial}{\partial x}(e\,\delta x) + V \frac{\partial}{\partial y}(e\,\delta y) + V \frac{\partial}{\partial z}(e\,\delta z)\right] d\varpi = +\int V\,\delta e\,d\varpi.$$

Or

$$4\pi e = \frac{\partial(KP)}{\partial x} + \frac{\partial(KQ)}{\partial y} + \frac{\partial(KR)}{\partial z};$$

donc

$$\delta W = -\frac{1}{4\pi}\int V\,\delta\left[\frac{\partial(KP)}{\partial x} + \frac{\partial(KQ)}{\partial y} + \frac{\partial(KR)}{\partial z}\right] d\varpi.$$

Considérons seulement la première intégrale

$$\frac{1}{4\pi}\int V\,\delta\frac{\partial(KP)}{\partial x}\,d\varpi.$$

On peut intervertir les signes de dérivation et de variation

$$\frac{1}{4\pi}\int V \frac{\partial}{\partial x}[\delta(KP)]\,d\varpi = -\frac{1}{4\pi}\int V \frac{\partial}{\partial x}\left[\delta\left(K\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right] d\varpi;$$

mais la variation δ ne porte que sur la position des masses et non sur

Digitized by Google

le milieu lui-même, de sorte que l'on peut faire sortir K du signe δ

$$\delta W = -\frac{1}{4\pi}\int\left(V\frac{\partial}{\partial x}K\delta\frac{\partial V}{\partial x}+\dots\right)d\varpi;$$

par la même transformation que ci-dessus, on en déduit

$$\delta W = \frac{1}{4\pi}\int K\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta\frac{\partial V}{\partial x}+\dots\right)d\varpi.$$

L'intégrale de surface complémentaire

$$\int_S\left(lKV\delta\frac{\partial V}{\partial x}+\dots\right)dS$$

est nulle, si à l'infini on a $V = 0$ et si les autres surfaces limitant le champ sont des surfaces à divers potentiels V_1, V_2, ..., sur chacune desquelles la charge totale n'éprouve pas de variation

$$\delta\int\left(Kl\frac{\partial V}{\partial x}+\dots\right)d\varpi = 0.$$

$$\delta W = \frac{1}{8\pi}\int K\delta\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi = \delta\int\frac{KE^2}{8\pi}d\varpi.$$

Donc

$$W = \int\frac{KE^2}{8\pi}d\varpi.$$

L'énergie par unité de volume peut donc être prise égale à $\frac{KE^2}{8\pi}$.

Champ électrique a l'intérieur des corps solides. — On a vu précédemment comment on peut définir, d'une part, le champ électrique en un point d'un milieu fluide isolant et, d'autre part, la quantité d'électricité existant dans l'intérieur d'un volume déterminé.

La quantité d'électricité a pour expression une intégrale de surface prise le long de la surface qui limite le volume.

Enfin, nous rappelons que deux lois principales résultent de l'examen des phénomènes du champ électrostatique, à savoir : l'existence d'un potentiel et la conservation de la quantité d'électricité.

1° *Existence d'un potentiel.* — Si l'on déplace des corps chargés dans un milieu isolant, puis qu'on les ramène à leur position primitive, le travail total extérieur qu'il faut dépenser pour produire ce cycle

Digitized by Google

d'opérations est nul. Cette loi n'est évidemment qu'une approximation; elle est d'autant plus exacte que les mouvements sont plus lents, car on néglige la chaleur dégagée dans les conducteurs en vertu de la loi de Joule, pendant les redistributions de l'électricité, qui s'opèrent au cours du cycle. Enfin, il faut supposer que dans la suite des opérations on n'ajoute, ni ne supprime de liaisons.

Cette loi, appliquée à une unité d'électricité qu'on déplace le long d'un circuit fermé C, s'exprimera par l'équation

$$\int_C (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = 0$$

[P, Q, R, composantes du champ E au point (x, y, z)].

2° *Conservation de la charge.* — On considère un volume U limité par une surface S; celle-ci peut traverser divers milieux isolants; en ce cas, on suppose une coupure formée par deux surfaces parallèles à la surface de séparation des milieux et infiniment voisines l'une de l'autre, de part et d'autre de cette surface. On vide de matière l'intérieur de cette coupure, on la remplit par le milieu fluide isolant habituellement considéré : l'air ambiant pour lequel on peut faire $K = 1$. L'expérience montre que cette coupure ne modifie le champ considéré qu'infiniment peu. Dans ces conditions, l'intégrale $\int_S E_n\,dS$ mesure la quantité d'électricité incluse dans le volume et demeure constante, quels que soient les déplacements des corps électrisés ou non électrisés à l'intérieur du volume U.

Cette intégrale ne change même pas de valeur, si l'on vient à ajouter ou a supprimer des liaisons par la mise en contact ou la séparation de deux conducteurs. C'est l'expérience seule qui peut nous apprendre cette propriété du champ électrique que nous appelons la conservation de la charge.

En outre, nous prévenons que nous aurons constamment à appliquer le théorème de Vaschy. On sait que, d'après ce théorème, le vecteur E(P, Q, R), intensité du champ électrique, peut être considéré comme une force résultante, due à une certaine distribution de masses newtoniennes et laplaciennes, que ce théorème définit avec précision. Cela posé, il nous reste à explorer le champ à l'intérieur des corps solides, soit conducteurs, soit diélectriques.

L'étude que nous allons faire est semblable à celle qui a donné lieu

Digitized by Google

à la théorie de sir William Thomson pour la constitution des aimants, mais, pour éviter la considération de tout fluide hypothétique, nous suivrons une marche inverse de la sienne.

Pour savoir donc ce qui se passe en un point O d'un corps solide, on y pratiquera une cavité, et cette cavité sera remplie du corps fluide normal, de l'air par exemple, considéré, dans le cas ordinaire, comme constituant le milieu où sont plongés les conducteurs. On examinera alors le champ à l'intérieur de la cavité. Il est clair que le volume de cette cavité devient, par le fait, extérieur au milieu solide et que, par suite, les procédés ordinaires d'observation s'appliquent tout naturellement. Mais aussitôt une difficulté se présente : c'est qu'en général, le champ dépend lui-même de la forme de la cavité. Dans les conducteurs cependant, il est nul. On est donc conduit à séparer l'étude en deux parties : celle des conducteurs, celle des diélectriques. Et dans le cas des diélectriques, disons tout de suite, par anticipation, que nous arriverons à définir deux vecteurs, l'un qui est l'intensité du champ, l'autre qui est l'intensité de la polarisation. Le fait même que l'on aura à considérer deux vecteurs au lieu d'un montre bien qu'on a affaire à un phénomène plus compliqué, au sujet duquel il est nécessaire de recourir à de nouvelles données expérimentales : le raisonnement seul ne peut suffire.

Quant aux conducteurs, on a à distinguer deux cas : celui des conducteurs isolés placés dans un champ électrostatique, et celui des conducteurs parcourus par un courant.

Le champ, tel que nous allons le définir, est bien nul dans un conducteur isolé, mais il n'est pas nul dans le cas où le conducteur est parcouru par un courant. Ajoutons, également par anticipation, que, dans ce dernier cas, il y a à définir, non pas seulement un vecteur : l'intensité du champ électrique, mais deux vecteurs ; à côté de l'intensité du champ électrique, il faut envisager aussi l'intensité de la densité du courant. Ces deux vecteurs sont en général proportionnels et dirigés suivant la même direction, ce qui peut faire croire que l'étude de l'un se ramène à l'étude de l'autre. C'est pourtant là une confusion. Car, dans les milieux qui ne sont pas isotropes, on doit supposer que l'intensité du champ n'est pas en général dirigée suivant la même direction que le courant. Ces deux vecteurs : intensité du champ et intensité de la densité de courant, correspondent à deux propriétés distinctes.

Digitized by Google

Pour définir l'intensité du champ, on doit observer l'action exercée sur l'unité d'électricité ; pour définir l'intensité de la densité de courant, il faut explorer le champ magnétique.

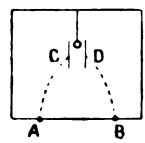
Ces explications étaient nécessaires ; les corps solides conducteurs nous amèneront à concevoir le courant ; les corps solides isolants nous donneront la notion nouvelle de polarisation.

Champ électrique à l'intérieur des conducteurs. — Examinons le cas des conducteurs. Bornons-nous au cas de l'Électrostatique. On dit d'ordinaire : le champ électrique est nul à l'intérieur d'un conducteur en équilibre électrostatique. Mais un fait négatif ne se prouve pas ; il faut d'abord trouver un cas où le champ ne soit pas nul ; l'expérience faite ainsi servira à définir le champ ; puis on verra quelles sont les circonstances ou les conditions dans lesquelles le champ ainsi défini se réduit à zéro. C'est ce qui nous oblige à considérer tout d'abord un conducteur parcouru par un courant permanent.

Si, dans la masse d'un conducteur parcouru par un courant permanent, nous pratiquons une cavité et qu'à l'intérieur de cette cavité nous déplacions une petite sphère chargée d'une unité d'électricité, de façon à y explorer le champ par les moyens ordinaires, on y trouvera un champ stable et ce champ ne sera pas nul. Si, au contraire, le conducteur est en équilibre électrostatique, le champ y sera nul. C'est en ce sens que nous dirons que le champ est nul à l'intérieur d'un conducteur.

Considérons, par exemple, la cage de Faraday (*fig.* 17) ; quand elle possède un fort état d'électrisation, on peut relier à deux points A

Fig. 17.



et B de son enveloppe métallique, par des fils volants AC et BD, les armatures d'un condensateur plan, sans y créer aucun champ électrique. Si, au contraire, les points A et B étaient reliés aux deux pôles d'une pile, un pendule chargé placé entre les deux armatures éprouverait une déviation.

Digitized by Google

Il est, de plus, à remarquer que l'action exercée par la cage de Faraday à son extérieur pendant qu'elle est chargée ne dépend pas du tout de la nature des corps qui se trouvent à son intérieur; par exemple, elle exercerait la même action, si elle était constituée par un corps métallique entièrement plein.

Par suite, au point de vue de l'action ou de l'influence sur le milieu extérieur, il est indifférent de supposer qu'un conducteur chargé soit plein dans sa masse ou qu'il soit constitué par une surface métallique très mince.

Mais, dans ce dernier cas, le champ à son intérieur peut être supposé nul. C'est en ce sens qu'on peut dire que le champ à l'intérieur d'un conducteur est nul.

Appliquons ces principes à un cas particulier.

Considérons une sphère métallique chargée. Le champ, à son extérieur, est dirigé suivant le rayon et a pour intensité $\frac{M}{r^2}$, à une distance r du centre de la sphère. Nous pouvons supposer que la sphère, au lieu d'être pleine, soit creuse et que le champ soit égal à zéro à l'intérieur.

Calculons alors les quantités que nous avons appelées ρ, μ, σ et τ dans la démonstration du théorème de Vaschy.

La surface de la sphère est la seule surface de discontinuité du champ et, sur cette surface, dont j'appelle R le rayon, nous aurons

$$\sigma = \frac{M}{4\pi R^2}$$

et, en tous les points du champ, ρ et μ seront nuls.

On dira donc que la sphère est chargée à la surface d'une quantité d'électricité totale M avec une densité égale à $\frac{M}{4\pi R^2}$. Autrement dit, une couche sphérique homogène exerce à distance la même action que si sa masse était concentrée au centre.

Examinons enfin la direction de l'intensité du champ en un point voisin d'une surface métallique.

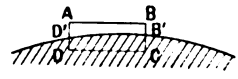
Si nous considérons maintenant le champ électrostatique dans le voisinage d'un conducteur parcouru par un courant permanent, en général l'intensité du champ ne sera pas normale à la surface du conducteur ; si, au contraire, le conducteur est en équilibre électrosta-

Digitized by Google

tique, le champ sera normal à la surface dans le voisinage de celle-ci.

Cette propriété peut se démontrer comme suit : Considérons un conducteur (*fig.* 18) à l'état d'équilibre électrostatique et envisageons

Fig. 18.

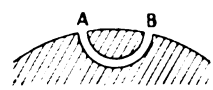


un chemin ABCD fermé, constitué par un élément AB parallèle à la surface, tandis que B'CDD' est un canal infiniment délié creusé dans le corps conducteur. En vertu de l'existence d'un potentiel, propriété vérifiée dans de nombreux cas particuliers et que nous admettons, par induction, comme étant une loi générale, le travail le long de AB sera égal au travail le long de DC, les travaux correspondant à AD'D et BB'C étant négligeables, parce que ces longueurs peuvent être infiniment petites par rapport aux éléments AB et CD. Mais le travail le long de DC est nul, puisque l'expérience nous apprend que le champ à l'intérieur des conducteurs est nul; donc, l'intensité du champ est normale à AB; et comme AB a une direction quelconque parallèle au plan tangent, l'intensité est normale à la surface dans son voisinage immédiat.

Inversement, le fait expérimental également vérifiable avec facilité que l'intensité du champ est normale à la surface fera conclure que l'intensité du champ est nulle à l'intérieur du conducteur, c'est-à-dire à l'intérieur d'un canal infiniment étroit pratiqué dans le conducteur.

En second lieu détachons par une coupure infiniment étroite l'élément superficiel AB de la surface du conducteur (*fig.* 19); l'expé-

Fig. 19.



rience montre que le champ électrique n'est pas sensiblement modifié par cette séparation ; la loi de conservation de la charge montre que l'on aura, pour la quantité d'électricité σdS répartie sur l'élément de

Digitized by Google

volume AB, l'expression $\frac{E}{4\pi} dS$, puisque tous les autres éléments de l'intégrale $\int \frac{E_n dS}{4\pi}$ s'annulent.

On est amené à admettre que la quantité d'électricité considérée est uniquement répartie sur la surface dS, par le fait que cette quantité est invariable, quand la forme et l'étendue de la coupure varient, mais ce n'est pas une démonstration rigoureuse.

Cette quantité σ se trouve définie comme quantité d'électricité, par le raisonnement qui précède, mais en même temps, l'application du théorème de Vaschy nous montre que σ doit être considérée au nombre des masses qui servent à définir le vecteur E comme résultante d'actions à distance; en effet $4\pi\sigma$ n'est autre que la discontinuité normale du vecteur E à la surface du conducteur. Cette masse σdS doit être supposée répartie sur la surface dS.

De là résulte la justification de l'emploi du disque d'épreuve. Ce petit disque métallique vient se substituer à un élément de surface ΔS du conducteur chargé sur lequel on l'applique. Quand on l'écarte du conducteur à une distance infiniment petite par rapport à son rayon, le champ électrique produit par le conducteur n'éprouve aucune variation; mais, en vertu de la propriété du corps creux, le champ est nul dans le volume compris entre l'élément ΔS du conducteur et la face du disque d'épreuve qui avait été appliquée sur lui. L'autre face du disque est donc chargée de la masse même qui, primitivement, recouvrait ΔS. Quand on écarte le disque d'épreuve, cette masse se répartira sur les deux faces suivant une certaine loi; mais, d'après le principe de la conservation de la charge, elle doit demeurer invariable et l'on pourra la mesurer en portant le disque soit dans le cylindre de Faraday relié à l'électromètre, soit dans la balance de Coulomb. Cette mesure donnera donc la charge qui se trouvait primitivement sur l'élément de surface ΔS, c'est-à-dire $\int_{\Delta S} \frac{E_n}{4\pi} dS$ et par suite on aura σ.

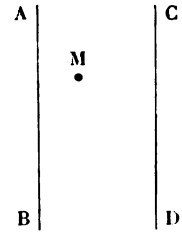
Nous cesserons ici l'étude des conducteurs, réservant pour plus tard l'examen du cas des courants permanents et nous abordons l'étude des diélectriques.

Champ électrique à l'intérieur d'un condensateur plan à faces parallèles. — Si l'on réunit aux deux pôles d'une pile respectivement les deux plateaux AB, CD d'un condensateur à faces planes et paral-

Digitized by Google

lèles (*fig.* 20), l'expérience apprend que le champ est constant en grandeur, direction et sens, si l'on se place en un point quelconque

Fig. 20.



entre les lames, pourvu qu'on puisse regarder les dimensions des lames comme très grandes par rapport à leur écartement et à condition de se placer à une distance suffisante des bords. L'intensité du champ est normale aux faces. D'ailleurs, elle est nulle à l'intérieur de la lame AB et à l'intérieur de la lame CD. Dès lors, le théorème de Vaschy nous apprend que le champ peut être considéré comme dû à des masses de densité constante réparties sur les armatures, positives σ_1 pour l'une d'elles, négatives σ_2 pour l'autre. AB sera l'armature positive si le champ est dirigé de AB vers CD; la densité de masse sera $\frac{E}{4\pi}$, si E est la valeur de l'intensité du champ. On remarquera, en effet, qu'on a

$$\rho = 0, \qquad \mu = 0, \qquad \tau = 0, \qquad \sigma_1 = \frac{E}{4\pi} \qquad \text{et} \qquad \sigma_2 = -\frac{E}{4\pi}.$$

Si l est la distance des armatures, El sera leur différence de potentiel V.

Si S est la surface des armatures qu'on envisage, la charge sera $\frac{ES}{4\pi}$ ou $\frac{S}{4\pi l}\cdot$ V en valeur absolue sur chaque armature.

Nous négligeons ici, pour plus de simplicité, les irrégularités près des bords.

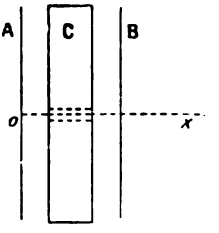
Champ électrique à l'intérieur d'un diélectrique solide. — Pour simplifier, nous envisagerons tout d'abord, à titre d'introduction, le cas du condensateur à air à faces parallèles, à l'intérieur duquel on a introduit une lame diélectrique solide. Nous supposerons que les lames

Digitized by Google

sont grandes par rapport à leur distance et nous négligerons par conséquent les perturbations apportées par les bords.

Soient A et B (*fig.* 21) les faces conductrices parallèles chargées : A positivement de la quantité + Q et B négativement de la quantité — Q pour fixer les idées. Soit C la lame diélectrique. Elle est à faces

Fig. 21.



parallèles et placée parallèlement à A et B. Il nous suffira d'étudier le champ le long de la droite *ox* perpendiculaire aux lames. Pour la partie situé dans la traversée de la lame diélectrique, nous étudierons le champ à l'intérieur d'un canal cylindrique infiniment délié pratiqué dans la substance.

Par raison de symétrie, le champ est dirigé suivant *ox*; soit E l'intensité entre A et C; l'intensité sera la même entre C et B, parce que les densités électriques sur A et sur B sont égales et de signes contraires. Soit E′ l'intensité dans le canal. La différence de potentiel entre les plaques A et B est EL + E′L′, L étant le chemin dans l'air libre suivant *ox*, et L′ la longueur du canal.

Or, l'expérience apprend que si la charge de A et de B reste la même, le potentiel varie quand on introduit la lame C. Mais E reste invariable puisque $+\frac{E}{4\pi}$ représente la densité de l'électricité sur l'armature positive; donc c'est E′ qui varie. On a donc pour E′ une valeur différente de E.

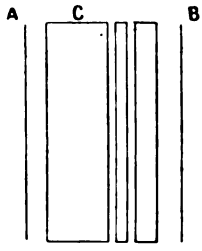
Appliquons alors le théorème de Vaschy; il nous apprendra que le vecteur qui est égal à E dans l'air libre et à E′ dans la substance du diélectrique s'explique comme résultante de forces agissant à distance, à la condition de supposer réparties sur les deux faces de la lame diélectrique des masses newtoniennes superficielles égales à la discontinuité $\frac{E'-E}{4\pi}$, négatives du côté de l'armature positive, et positives du côté de l'armature négative, puisqu'on a $E' < E$.

Digitized by Google

Polarisation diélectrique. — L'hypothèse de la polarisation réside en ceci : supposons tracées dans la lame diélectrique deux coupures infiniment voisines de façon à isoler une lame diélectrique infiniment mince; elle sera, en vertu du théorème de Vaschy, recouverte sur ses deux faces de masses newtoniennes superficielles de signes contraires l'une à l'autre, dont la densité sera égale en valeur absolue à $\frac{E - E'}{4\pi}$. Ces masses, nous les supposerons constituées par un fluide hypothétique, positif et négatif, comme l'est l'électricité elle-même, et que nous appellerons *fluide inducteur* pour le distinguer de l'électricité vraie.

Nous imaginerons que cet état de polarisation subsiste quand les coupures disparaissent pour n'être plus que des surfaces géométriques et que chaque couche infiniment petite de la substance diélectrique est semblablement polarisée. La quantité $\frac{E - E'}{4\pi}$ caractérisera alors l'intensité de la polarisation, en un point quelconque du milieu isolant solide considéré.

Fig. 22.



La masse entière du diélectrique peut, de cette façon, être décomposée en cellules dont les deux bases sont chargées de quantités égales et de signes contraires de fluide inducteur; les masses de fluide inducteur qui recouvrent les deux bases juxtaposées de deux particules contiguës s'annulant l'une l'autre. Une petite particule, constituée comme il vient d'être dit, est tout à fait analogue à un petit aimant. La théorie de la polarisation diélectrique est donc semblable à celle de la constitution des aimants. Il s'agit de savoir si l'on peut pousser jusqu'au bout l'analogie. A côté des phénomènes de magnétisme induit, tout à fait pareils au cas de polarisation de lame

Digitized by Google

diélectrique que nous venons de considérer, y a-t-il lieu d'envisager une polarisation diélectrique rigide, analogue au magnétisme rigide des aimants permanents? Nous répondrons affirmativement; sans doute, dans bien des cas, une substance diélectrique paraîtra se comporter comme un aimant diélectrique sans en être un réellement; qu'on la fende en deux parties et l'on constate que chacune d'elles a conservé une charge électrique. Le diélectrique est peut-être bien polarisé, mais en outre, il sert alors aussi de support à des charges électriques; il est véritablement électrisé.

Mais Pellat a montré qu'en prenant des précautions convenables, on pouvait donner à une lame d'ébonite une polarisation résiduelle sans que l'ébonite fût électrisée. D'autre part, la polarisation diélectrique peut se produire indépendamment d'un champ électrique : c'est ce qui a lieu pour certains cristaux. Les cristaux piézoélectriques se polarisent sous l'action d'une tension ou d'une compression; les cristaux pyroélectriques manifestent leur polarisation sous l'action d'une variation de température.

Nous sommes ainsi conduits à admettre que la polarisation est un phénomène qui peut être indépendant de la présence d'un champ extérieur préexistant, indépendant de la présence de quantités d'électricité. L'intensité de la polarisation diélectrique sera alors représentée par un vecteur qui sera tout à fait distinct du vecteur représentatif de l'intensité du champ.

Champ à l'intérieur d'un diélectrique polarisé. — Plaçons-nous maintenant dans le cas le plus général. Nous supposons donc que l'intensité du champ ne coïncide pas avec celle de la polarisation. Pour l'exposé qui va suivre, nous aurons besoin de deux propositions que nous allons commencer par établir. D'une façon générale, si nous considérons un plan P, nous appellerons coupure P l'espace qui serait compris entre deux plans Π et Π′ parallèles au plan P, situés de part et d'autre de ce plan, infiniment voisins de lui et qui serait rempli du fluide ambiant à la place de la substance du dielectrique.

Cela posé, voici la première proposition :

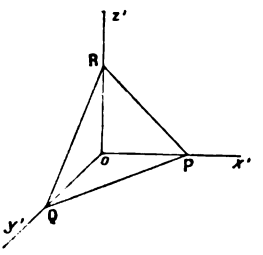
Première proposition. — Considérons un tétraèdre élémentaire constitué par une face oblique PQR (*fig.* 23), de surface $d\mathrm{S}$ et par

Digitized by Google

trois faces OQR, ORP, OPQ respectivement perpendiculaires à Ox, Oy, Oz et de surface dS_x, dS_y, dS_z.

Supposons que les quatre faces soient des coupures à l'intérieur

Fig. 23.



desquelles les composantes normales de E soient égales à $4\pi D_n$, $4\pi f$, $4\pi g$, $4\pi h$ respectivement. Si le diélectrique n'est pas électrisé, nous aurons

$$4\pi D_n\, dS = 4\pi f\, dS_x + 4\pi g\, dS_y + 4\pi h\, dS_z.$$

Si donc D est le vecteur qui a pour composantes (fgh) et si α est l'angle de D avec la normale dS, on aura

$$D_n = D\cos\alpha.$$

Deuxième proposition. — Considérons un chemin élémentaire OO' de longueur ds et soit OMNO' une ligne brisée dont les côtés OM, MN, NO' sont parallèles aux axes Ox, Oy, Oz et de longueur dx, dy, dz, respectivement. Supposons que ces lignes représentent en réalité des canaux cylindriques infiniment petits pratiqués dans la substance du diélectrique et remplis d'air. Soient E_s, P, Q, R, les composantes de E suivant ds, dx, dy, dz dans les divers canaux. Si le champ admet un potentiel, nous aurons

$$E_s\, ds = P\, dx + Q\, dy + R\, dz.$$

Si donc E désigne maintenant le vecteur qui a pour composantes (PQR) et si α est l'angle de ds avec E, on aura

$$E_s = E\cos\alpha.$$

Cela posé, nous allons établir les égalités

$$4\pi f = P + 4\pi A,$$
$$4\pi g = Q + 4\pi B,$$
$$4\pi h = R + 4\pi C.$$

Digitized by Google

Dans ces égalités f, g, h sont les composantes du vecteur D que nous venons de définir; P, Q, R sont de même les composantes du vecteur E que nous venons de définir également. Enfin, A, B, C sont les composantes de la polarisation I qui va justement être définie par les équations ci-dessus et dont la signification résultera des considérations qui vont suivre.

Considérons autour du point O la fente limitée par les plans infiniment voisins $\lambda x + \mu y + \nu z = \pm \varepsilon$ (λ, μ, ν, cosinus directeurs de la normale aux plans).

Considérons également le cylindre de révolution de rayon infiniment petit, perpendiculaire à cette fente et placé de façon que le point O soit sur son axe. Portons-nous le long de cet axe en un point O′ infiniment voisin du point O, soit E′ la composante suivant cet axe de l'intensité du champ au point O′. Soit de même $4\pi D'$ la composante suivant ce même axe de l'intensité du champ dans la coupure considérée, au voisinage du point O. On aura, d'après la première proposition,

$$D_n = \lambda f + \mu g + \nu h,$$

et d'après la seconde

$$E_s = \lambda P + \mu Q + \nu R.$$

Si donc, en vue de l'application du théorème de Vaschy, on considère un vecteur qui soit égal à E_s dans l'intérieur du diélectrique au voisinage du point O et à $4\pi D_n$ dans la fente considérée, ce vecteur pourra être considéré comme la résultante de forces agissant à distance suivant les lois de Newton et de Laplace, à la condition de faire entrer en ligne de compte sur les deux faces de la coupure une densité de masse superficielle $\pm\sigma$ définie par l'équation

$$\sigma = \frac{\lambda 4\pi f + \mu 4\pi g + \nu 4\pi h - (\lambda P + \mu Q + \nu R)}{4\pi}.$$

Imaginons un vecteur I dont les composantes suivant les axes seraient A, B, C, ces composantes ayant pour valeurs

$$A = \frac{4\pi f - P}{4\pi},$$

$$B = \frac{4\pi g - Q}{4\pi},$$

$$C = \frac{4\pi h - R}{4\pi}.$$

Digitized by Google

On aura, pour définir σ,

$$\sigma = \lambda A + \mu B + \nu C.$$

Telle est la densité superficielle de masse newtonienne qu'il y aurait à considérer comme répartie, positivement d'un côté, négativement de l'autre, sur les deux faces de la coupure dont la normale a pour cosinus directeurs λ, μ, ν.

Nous retrouvons ainsi en ordre inverse tous les résultats de l'analyse de sir William Thomson. Il se donne une représentation très concrète de la polarisation magnétique et il déduit de là la force magnétique H et l'induction B; nous partons au contraire de l'observation de H et de B et nous en déduisons les masses fictives de fluide inducteur qu'il y a lieu de faire entrer en ligne de compte. Il faut de plus transposer les quantités magnétiques en quantités électriques, H et E se correspondent; B et $4\pi D$ également.

1° *Densité de la charge répandue dans le volume du champ.*— Nous avons défini précédemment la densité e de la quantité d'électricité par la relation

$$\frac{\partial KP}{\partial x} + \frac{\partial KQ}{\partial y} + \frac{\partial KR}{\partial z} = 4\pi e.$$

2° *Densité de la charge à la surface des conducteurs.* — A la surface des conducteurs nous avons une discontinuité du vecteur H attribuable à une densité de quantité superficielle

$$\sigma = \frac{KE_n}{4\pi}.$$

(Expérimentalement, on constate que l'électricité réside uniquement à la surface des corps conducteurs, à l'aide d'une sphère métallique creuse percée d'une ouverture et d'un plan d'épreuve.)

3° *Densité de la masse à la surface de séparation de deux diélectriques fluides.* — A la surface de séparation de deux diélectriques, nous aurons

$$KE_n = K'E'_n.$$

En effet (*fig.* 24), si nous considérons un volume infiniment petit compris entre deux bases infiniment voisines parallèles à la surface

Digitized by Google

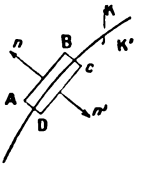
de séparation des deux milieux, de part et d'autre de cette surface, la définition mathématique de la quantité d'électricité comprise à l'intérieur de ce volume donne immédiatement

$$KE_n + K'E'_{n'} = 0,$$

si l'on admet qu'il n'y a pas de charge sur cette surface, ou

$$KE_n = K'E'_n \qquad \text{puisque} \qquad E'_{n'} = -E_n ;$$

Fig. 24.



d'où résulte pour le champ une discontinuité normale

$$4\pi\sigma = E_n - E'_n = E'_n\left(\frac{K'}{K} - 1\right).$$

Si je pose $\frac{K'}{K} = \mu_e$ et $\sigma = \varkappa_e E'_n$, il vient

$$4\pi\varkappa_e = \mu_e - 1,$$

formule connue.

4° *Densité de la polarisation d'un diélectrique solide.* — Si l'on a affaire à un diélectrique solide, on a

$$4\pi f = P + 4\pi A$$

et deux autres équations analogues; si nous supposons qu'il n'y ait pas de polarisation permanente, nous ferons alors les hypothèses

$$A = \varkappa_e P, \qquad B = \varkappa_e Q, \qquad C = \varkappa_e R,$$

$\varkappa_e$ étant un coefficient constant.

Alors on a

$$4\pi f = P + 4\pi\varkappa_e P.$$

Si l'on pose

$$4\pi f = \mu_e P,$$

on aura encore

$$\mu_e = 1 + 4\pi\varkappa_e.$$

Digitized by Google

Cette égalité servira à définir le rapport des pouvoirs inducteurs spécifiques des deux milieux.

Dans les diélectriques liquides $\varkappa_e$ se déduira de μ_e; dans les diélectriques solides ce sera μ_e qui se déduira de $\varkappa_e$.

5° *Constitution d'un diélectrique polarisé.* — Nous nous proposons de reprendre ici, d'une façon plus générale au point de vue mathématique, l'exposé qui a fait l'objet du paragraphe intitulé : *polarisation diélectrique*. Considérons, pour fixer les idées, une enceinte conductrice S enveloppant un champ électrique comprenant un conducteur S′ chargé et un corps diélectrique, dont nous désignerons le volume par Ω et la surface par Σ. L'ensemble du champ électrique entre les surfaces conductrices S et S′ et la surface Σ constitue un volume U que nous supposons rempli par un fluide, l'air par exemple, dont le pouvoir inducteur électrique sera supposé égal à l'unité.

L'exploration du champ nous apprend à définir, à l'intérieur du volume U, l'intensité du champ électrique; nous aurons, dans cette partie du champ, identité entre les deux vecteurs que nous avons appelés plus haut E et $4\pi D$.

L'exploration du champ à l'intérieur du volume Ω du diélectrique peut, comme on l'a vu, se faire de deux façons : on peut pratiquer des cavités en forme de cylindre allongé ou en forme de disque plat. Dans le premier cas, on arrive à définir un vecteur E. Dans le second cas, on arrive à définir un autre vecteur $4\pi D$. C'est ce que nous avons montré dans le paragraphe intitulé : *Champ à l'intérieur d'un diélectrique polarisé*. Je rappelle les propriétés de ces deux vecteurs E et $4\pi D$. Il s'agit de déterminer les valeurs des masses ρ, μ, σ, τ qu'il y a lieu d'envisager pour appliquer le théorème de Vaschy relatif aux actions à distance.

Propriétés du vecteur E. — Ce vecteur satisfait à la condition d'existence du potentiel

$$\int (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = 0, \tag{1}$$

pour un contour fermé quelconque; on a donc

$$4\pi\mu_x = \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} = 0, \qquad \ldots \qquad \text{ou} \qquad \mu = 0.$$

Digitized by Google

Ces égalités ne cesseraient d'être exactes, comme on le verra plus tard, que dans un champ dont l'état ne serait pas stable; le tourbillon μ représenterait alors la variation instantanée du flux d'induction magnétique.

D'autre part, si nous nous plaçons en un point P de la surface Σ du diélectrique Ω et que nous considérions sur la normale en P à Σ deux points infiniment voisins, l'un P_i à l'intérieur du diélectrique, l'autre P_e à son extérieur, nous aurons à envisager les valeurs de E en P_i et en P_e et nous les distinguerons par les indices i et e.

Considérons un élément de chemin quelconque à la surface de Σ en P, appelons-le $(\delta x, \delta y, \delta z)$; l'application de l'équation (1) le long d'un chemin fermé constitué par les deux bords de cet élément, supposés situés l'un dans le milieu Ω, l'autre dans le milieu U, donne

$$l\,\delta x + m\,\delta y + n\,\delta z = 0,$$
$$P_i\,\delta x + Q_i\,\delta y + R_i\,\delta z = P_e\,\delta x + Q_e\,\delta y + R_e\,\delta z,$$

et comme δx, δy, δz sont arbitraires, pourvu qu'ils satisfassent à la première de ces deux relations, on a

$$n(Q_i - Q_e) - m(R_i - R_e) = 0, \qquad \ldots.$$

Appelons alors $4\pi\tau_1$ la discontinuité sur la surface Σ du vecteur dont les composantes sont

$$4\pi\tau_x = nQ - mR,$$
$$4\pi\tau_y = lR - nP,$$
$$4\pi\tau_z = mP - lQ,$$

l, m, n étant les cosinus directeurs de la normale en P dirigée vers P_i.

Nous aurons

$$4\pi\tau_1 = 0, \qquad \text{sur } \Sigma.$$

D'autre part, sur les surfaces S et S′ nous avons également $\tau = 0$, ce que nous écrirons $\tau_2 = 0$, en réservant l'indice 1 pour Σ et Ω, et l'indice 2 pour U, S et S′.

Considérons maintenant le vecteur

$$4\pi\sigma = lP + mQ + nR.$$

Sur les surfaces S et S′, σ représentera la densité σ_2 de la charge électrique. Sur la surface Σ, σ éprouvera une discontinuité σ_1, car

Digitized by Google

on a, pour $P_i - P_e, \ldots$, des valeurs différentes de zéro; on aura

$$4\pi\sigma_1 = l(P_i - P_e) + m(Q_i - Q_e) + n(R_i - R_e).$$

Considérons enfin la quantité ρ

$$4\pi\rho = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Elle différera de zéro dans le milieu U là où il est électrisé. Dans le milieu Ω, elle pourra être différente de zéro, sans qu'il y ait effectivement une densité électrique, celle-ci étant définie en fonction de $4\pi D$ et non de E. On pourra exprimer cette différence en disant que ρ désigne la densité du fluide inducteur et non celle de l'électricité proprement dite.

Les quantités $(\rho, \sigma, \mu, \tau)$ que nous venons de passer en revue suffisent pour définir entièrement le vecteur E, en vertu de la formule de Vaschy.

Passons au vecteur D.

Propriétés du vecteur $4\pi D$. — Ce vecteur satisfait à la condition

$$\int (lh + mg + nf)\, dS = 0, \tag{2}$$

appliquée à une surface fermée quelconque tracée dans le champ, pourvu que cette surface ne contienne pas d'électricité à son intérieur. Posons donc d'une façon générale

$$\rho' = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Si le point considéré (xyz) est dans l'air, ρ' sera égal à ρ; puisque alors $4\pi D = E$, et ρ' sera ou non différent de zéro suivant que le milieu sera ou non électrisé en ce point. De plus, à la différence de ρ, quand le point considéré est à l'intérieur Ω du diélectrique, ρ' est nul, d'une façon certaine, si le milieu n'y est pas électrisé; que si, au contraire, le milieu est électrisé, ρ' représentera la densité de volume de l'électricité vraie.

Considérons maintenant un point P sur la surface Σ qui limite le diélectrique et soit dS un élément de cette surface; cet élément pourra être considéré comme ayant deux faces, l'une située dans le

Digitized by Google

milieu U extérieur (nous distinguerons les quantités qui s'y rapportent par la lettre e), l'autre située dans le diélectrique Ω (nous distinguerons les quantités qui s'y rapportent par la lettre i). En appliquant la formule (2) au volume évanouissant compris entre ces deux faces, nous aurons

$$lf_i + mg_i + nh_i = lf_e + mg_e + nh_e.$$

C'est-à-dire que la discontinuité normale de B sera nulle à la surface non électrisée Σ.

La discontinuité σ'_1 de σ', définie par

$$\sigma' = lf + mg + nh,$$

sera nulle sur Σ.

A la surface des conducteurs S et S' nous avons d'ailleurs $\sigma' = \sigma$, ce que nous écrirons $\sigma'_2 = \sigma_2$; cette quantité représente la densité de l'électricité vraie à la surface des conducteurs.

Si nous posons

$$\mu'_x = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial y}, \qquad \ldots,$$
$$\tau'_x = ng - mh, \qquad \ldots,$$

rien n'exige d'ailleurs que μ' soit nul à l'intérieur du diélectrique. A l'extérieur du diélectrique, les vecteurs E et 4πD étant identiques, on a $\mu' = \mu$ et cette quantité est nulle, parce qu'il y a un potentiel; mais à l'intérieur de Ω, cette propriété de l'existence d'un potentiel a été seulement démontrée pour le vecteur E et non pour le vecteur 4πD. On a donc $\mu_2 = \tau_2 = 0$ et $\mu_1 \neq 0$. De même la discontinuité de τ à la surface de Σ n'est pas forcément nulle et, par suite, on a également $\tau_1 \neq 0$.

Considérons maintenant en troisième lieu le vecteur I, composantes (A, B, C), qui est défini par l'équation géométrique

$$4\pi\overline{\mathrm{D}} = \overline{\mathrm{E}} + 4\pi\overline{\mathrm{I}}$$

ou

$$4\pi\mathrm{A} = a\,4\pi f - \mathrm{P},$$
$$4\pi\mathrm{B} = b\,4\pi g - \mathrm{Q},$$
$$4\pi\mathrm{C} = c\,4\pi h - \mathrm{R}.$$

Ce qui a été dit précédemment à la fin du paragraphe relatif au *champ à l'intérieur d'un diélectrique polarisé*, ainsi que l'étude qui a été faite du champ à l'intérieur du *condensateur à faces*

Digitized by Google

parallèles, montre qu'un vecteur quelconque h qu'on observe à l'intérieur d'une cavité en forme de disque infiniment plat, qui y est constant en grandeur, direction et sens, et qui est normal aux faces, peut être considéré comme l'intensité du champ électrique dû à des masses fictives réparties sur les bases avec une densité superficielle constante $\pm \frac{h}{4\pi}$, le signe $+$ se rapportant à l'une des bases, le signe $-$ à l'autre. Par conséquent, la différence entre les vecteurs $4\pi D$ et E est un vecteur $4\pi I$ qui peut être considéré comme étant le vecteur h, intensité de champ, qui serait dû à des masses $\pm \frac{4\pi I}{4\pi}$ ou $\pm I$, réparties sur les bases d'une cavité en forme de disque aplati, normale à la résultante de $4\pi D$ et de $-E$. Cette quantité I est ce qu'on appelle la *résultante de la polarisation*. Il s'agit de justifier cette dénomination.

Or on sait, d'après la formule de Vaschy, que le vecteur E est dû aux masses newtoniennes ou laplaciennes ρ, σ, μ, τ; savoir :

1° Hors du diélectrique

$$\rho_2 \neq 0, \qquad \sigma_2 \neq 0, \qquad \mu_2 = 0, \qquad \tau_2 = 0;$$

2° A l'intérieur du diélectrique Ω ou sur la surface Σ

$$\rho_1 \neq 0, \qquad \sigma_1 \neq 0, \qquad \mu_1 = 0, \qquad \tau_1 = 0.$$

On sait que le vecteur $4\pi D$ est dû de même aux masses $\rho', \sigma', \mu', \tau'$, savoir :

1° Hors du diélectrique

$$\rho'_2 = \rho_2, \qquad \sigma'_2 = \sigma_2, \qquad \mu_2 = 0, \qquad \tau_2 = 0;$$

2° A l'intérieur du diélectrique Ω et sur la surface Σ

$$\rho'_1 = 0, \qquad \sigma'_1 = 0, \qquad \mu'_1 \neq 0, \qquad \tau'_1 \neq 0.$$

On voit donc que la différence $4\pi D - E$ ne dépend que des quantités $\rho_1, \sigma_1, \mu'_1, \tau'_1$ situées à l'intérieur du diélectrique ou caractérisant l'état de sa surface et non de ρ_2 et de σ_2.

On dira que l'état d'électrisation et de polarisation du diélectrique Ω est *permanent*, si ces quantités $\rho_1, \sigma_1, \mu'_1, \tau'_1$ conservent la même valeur, quelles que soient les valeurs de ρ_2 et de σ_2; on pourrait même dire quelles que soient les valeurs de μ_2 et de τ_2 si

Digitized by Google

nous voulions anticiper et envisager les phénomènes, non plus dans le champ électrostatique stable, mais dans l'état variable où il peut y avoir un tourbillon électrique correspondant à une variation instantantanée du flux magnétique.

Si, au contraire, on n'a pas affaire à un diélectrique, dont l'état soit *permanent*, les quantités $\rho_1, \sigma_1, \mu'_1, \tau'_1$ dépendront de l'état du champ extérieur; on sera dans le cas de la polarisation *induite*. Les hypothèses les plus simples relatives à ce cas ont été données dans le paragraphe 4° précédent.

Nous remarquerons tout de suite que les quantités μ'_1 et τ'_1 agissent suivant la loi de Laplace, comme des éléments de courant d'un fluide particulier, auquel on pourrait donner le nom de *fluide inducteur magnétique*, s'il était utile de le dénommer. En ce cas, les quantités

$$v_x = \int \frac{\mu_x}{r} d\varpi + \int \frac{\tau_x}{r} dS, \qquad \ldots,$$

seraient les composantes du potentiel vecteur $v(v_x, v_y, v_z)$ des courants du fluide inducteur magnétique.

Plaçons-nous en un point du milieu extérieur U; en ce point on a

$$4\pi D = E.$$

Écrivons l'égalité de ces deux vecteurs d'après leurs expressions selon la formule de Vaschy; les termes qui dépendent de ρ_2, σ_2 ou ρ'_2, σ'_2 disparaissent, parce qu'ils se détruisent mutuellement, et il restera

$$\int_\Omega \rho_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\varpi + \int_\Sigma \sigma_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS = \int_\Omega \left(\mu'_{1y} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \mu'_{1z} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right) d\varpi + \int_\Sigma \left(\tau'_{1y} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \tau'_{1z} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right) dS.$$

Cette égalité montre qu'au point de vue de l'action sur un point extérieur au diélectrique, les masses vectorielles μ'_1 et τ'_1 sont équivalentes aux masses newtoniennes ρ_1 et σ_1; c'est le principe auquel on pourrait donner le nom de *principe de l'équivalence* de la polarisation électrique et des courants de fluide inducteur magnétique.

Si l'ensemble des deux termes qui forment le premier membre de l'égalité précédente peut être considéré comme dû à la polarisation

Digitized by Google

du diélectrique, il faut qu'il ne dépende en réalité que du vecteur I. C'est ce qu'il est facile de vérifier, car nous avons

$$4\pi\rho_1 = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

$$0 = \frac{\partial 4\pi f}{\partial x} + \frac{\partial 4\pi g}{\partial y} + \frac{\partial 4\pi h}{\partial z},$$

et par différence

$$-4\pi\rho_1 = \frac{\partial}{\partial x}(4\pi f - P) + \frac{\partial}{\partial y}(4\pi g - Q) + \frac{\partial}{\partial z}(4\pi h - R)$$

ou bien

$$\rho_1 = -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right).$$

Nous avons de même

$$4\pi\sigma_1 = +(lP_i + mQ_i + nR_i) - (lP_e + mQ_e + nR_e),$$
$$0 = l\,4\pi f_i + m\,4\pi g_i + n\,4\pi h_i - (l\,4\pi f_e + m\,4\pi g_e + n\,4\pi h_e),$$

l, m, n étant les cosinus directeurs de la normale à Σ du côté de Ω; avec

$$4\pi A = 4\pi f_i - P_i, \quad \ldots$$

et

$$0 = 4\pi f_e - P_e, \quad \ldots;$$

d'où, par différence,

$$\sigma_1 = -(lA + mB + nC);$$

et, par conséquent, l'action due aux masses ρ_1 et σ_1 donne pour composante, suivant Ox,

$$-\int_\Omega \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,d\varpi - \int_\Sigma (lA + mB + nC)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,dS.$$

Posons

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2},$$

(x, y, z) étant le point attirant, $(x'y'z')$ le point attiré; l'expression précédente peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x'}\int\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)\frac{d\varpi}{r} + \frac{\partial}{\partial x'}\int (lA + mB + nC)\frac{dS}{r}.$$

Elle dérive du potentiel

$$-\int_\Omega \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)\frac{d\varpi}{r} - \int_\Sigma (lA + mB + nC)\frac{dS}{r},$$

Digitized by Google

qui peut s'écrire, grâce à une transformation connue,

$$\int_\Omega \left(A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + C \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\varpi.$$

Or, l'expression différentielle, sous le signe $\int$, représente le potentiel d'un petit aimant de moment magnétique égal à $I\, d\varpi$. Seulement, ici, il s'agit d'un petit aimant *diélectrique*. Le mot *polarisation* se trouve donc complètement justifié.

Nous pouvons compléter cet exposé en faisant remarquer que $4\pi D$ représente le tourbillon des courants de fluide inducteur magnétique dont l'ensemble est équivalent à la polarisation diélectrique.

Si, en effet, nous appliquons la formule de Vaschy pour déterminer la valeur du vecteur I(A, B, C) en un point situé à l'intérieur du diélectrique Ω, nous avons, pour la composante suivant Ox,

$$4\pi A = \int \rho_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\varpi + \int \sigma_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \int \left(\mu'_{1z} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \mu'_{1z} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right) d\varpi$$
$$- \int \left(\tau'_{1y} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \tau'_{1z} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right) dS.$$

Or, on a,

$$P = - \int \rho_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\varpi - \int \sigma_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x};$$

d'où

$$4\pi f = - \int \left(\mu'_{1y} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \mu'_{1z} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right) d\varpi - \int \left(\tau'_{1y} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \tau'_{1z} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right) dS,$$

ou

$$4\pi f = \frac{\partial}{\partial z'} v_y - \frac{\partial}{\partial y'} v_z, \qquad \ldots,$$

comme il résulte de l'expression donnée plus haut des composantes du potentiel vecteur en question; notre assertion est donc justifiée.

Problème de la distribution électrique. — Maintenant, si nous avons un milieu isolant non électrisé, nous pourrons trouver la distribution du champ en écrivant que $e = 0$ en tout point du diélectrique et que les conducteurs sont des surfaces équipotentielles.

Digitized by Google

Nous pourrons d'ailleurs nous fixer, ou bien les potentiels, ou bien les charges des conducteurs.

L'expression de l'énergie contenue dans le champ est

$$W = \int \frac{KE^2}{8\pi} d\varpi.$$

Si nous supposons que cette énergie ne dépende que du champ E en chaque élément, cette expression sera générale et $\frac{KE^2}{8\pi} d\varpi$ représentera la partie de l'énergie localisée dans l'élément $d\varpi$. Elle s'appliquera même au cas où il y a des conducteurs dans le champ.

On aura les conditions d'équilibre électrostatique en écrivant que l'équation $\delta W = 0$ est satisfaite pour tout déplacement des charges compatible avec les liaisons.

On a les conditions

$$\frac{\partial KP}{\partial x} + \frac{\partial KQ}{\partial y} + \frac{\partial KR}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

en tout point du diélectrique,

$$\int K(lP + mQ + nR)\, dS = 4\pi\varepsilon \tag{2}$$

à la surface du conducteur, ε étant sa charge totale.

Nous caractériserons un conducteur par la propriété suivante : la quantité d'électricité portée par un conducteur reste la même tant que celui-ci reste isolé. On sait, en effet, que lorsqu'on touche un conducteur électrisé avec un autre conducteur primitivement à l'état neutre, il y a partage de la charge entre les deux conducteurs comme si l'électricité avait pu glisser librement de l'un à l'autre. La propriété que nous avons énoncée répond donc bien à l'idée exprimée par le mot *conducteur*.

Écrivons donc la condition d'équilibre

$$\delta W = \int \frac{K}{4\pi} (P\,\delta P + Q\,\delta Q + R\,\delta R)\, d\varpi = 0.$$

Nous avons aussi

$$\frac{\partial . K\,\delta P}{\partial x} + \frac{\partial . K\,\delta Q}{\partial y} + \frac{\partial . K\,\delta R}{\partial z} = 0,$$

exprimant que le milieu primitivement non électrisé continue à ne

Digitized by Google

pas l'être, et à la surface des conducteurs

$$\int (l\,\delta K P + m\,\delta K Q + n\,\delta K R)\,dS = 0,$$

puisque la charge des conducteurs ne varie pas, ceux-ci restant isolés.

Il faut maintenant recourir au calcul des variations.

Multiplions la variation de l'équation différentielle (1) par une fonction ψ arbitraire pour l'instant. Nous avons

$$\delta W = \int \left[\frac{K}{4\pi}(P\,\delta P + Q\,\delta Q + R\,\delta R) - \psi\left(\frac{\partial K\,\delta P}{\partial x} + \frac{\partial K\,\delta Q}{\partial y} + \frac{\partial K\,\delta R}{\partial z}\right)\right] d\varpi = 0$$

On peut intégrer par parties la seconde intégrale

$$\int \psi \frac{\partial K\,\delta P}{\partial x}\,d\varpi = -\int K\,\delta P \frac{\partial \psi}{\partial x}\,d\varpi - \int \psi\, l K\,\delta P\,dS$$

(l, m, n, cosinus directeurs de la normale vers l'intérieur du champ).

En faisant la substitution, le coefficient de δP dans l'intégrale de volume sera

$$\frac{K}{4\pi} P + K \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Si donc nous choisissons la fonction ψ de façon qu'on ait

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{P}{4\pi},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{Q}{4\pi},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{R}{4\pi},$$

l'intégrale de volume s'évanouira.

Reste encore l'intégrale de surface; il faut qu'on ait

$$\int \psi (l K\,\delta P + m K\,\delta Q + n K\,\delta R)\,dS = 0.$$

Cette égalité doit être satisfaite quand l'intégrale est étendue à tous les éléments des conducteurs, mais elle doit être satisfaite en particulier si l'on fait varier δP, δQ, δR sur un seul conducteur, de sorte qu'on peut supposer l'équation appliquée successivement à chaque conducteur.

Digitized by Google

Considérons un seul conducteur S_1; comme sur ce conducteur $\delta\varepsilon = 0$, le calcul des variations montre alors que ψ doit être une constante.

Ainsi P, Q, R dépendent d'un potentiel et ce potentiel a une valeur constante à la surface de chaque conducteur. Par suite, (les lignes de forces aboutissent normalement à sa surface).

Dans la théorie du déplacement de Maxwell, sir William Thomson démontre semblablement que $\int \frac{2\pi}{K}(f^2 + g^2 + h^2)d\varpi$ est un minimum, quand les composantes du déplacement D(fgh) sont respectivement égales à

$$-\frac{K}{4\pi}\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad -\frac{K}{4\pi}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad -\frac{K}{4\pi}\frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Cf. § 4°. Ici K a même signification que μ_e.

Le problème de la distribution électrostatique ne peut avoir deux solutions. — Nous allons maintenant montrer que, s'il y a une solution au problème de la distribution électrique, cette solution doit être unique.

Les équations différentielles qui se rapportent au milieu et les équations intégrales qui se rapportent à la surface des conducteurs sont linéaires par rapport aux composantes P, Q, R du champ électrique. Si donc nous avons deux solutions

$$P_1, Q_1, R_1; \quad P_2, Q_2, R_2,$$

on aura immédiatement une troisième solution

$$P_1 + P_2, \quad Q_1 + Q_2, \quad R_1 + R_2.$$

Supposons que nous ayons résolu de deux façons le problème de la distribution électrique dans le cas où l'on se donne les charges réparties dans le volume et les potentiels ou les charges sur les divers conducteurs. Alors $P_1 - P_2$, $Q_1 - Q_2$, $R_1 - R_2$ constituera une distribution admissible où la charge électrique sera devenue nulle sur les conducteurs où l'on s'est donné la charge et où le potentiel est devenu nul, sur les conducteurs où l'on s'est donné le potentiel; je vais démontrer que, s'il n'y a pas de charge dans le milieu et si, sur les conducteurs, le potentiel ou la charge sont nuls, l'énergie du champ est nulle; il en résultera que le champ h sera nul et, par

Digitized by Google

suite,

$$P_1 \equiv P_2, \qquad Q_1 \equiv Q_2, \qquad R_1 \equiv R_2.$$

On a, en effet,

$$W = \int \frac{K(P^2 + Q^2 + R^2)}{8\pi} d\varpi.$$

Nous devons admettre pour la démonstration que P, Q, R dépendent d'un potentiel. On a donc

$$P = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Q = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad R = -\frac{\partial V}{\partial z};$$

d'où

$$W = -\frac{1}{8\pi}\int\left(\frac{\partial V}{\partial x}KP + \frac{\partial V}{\partial y}KQ + \frac{\partial V}{\partial z}KR\right)d\varpi$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int V\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}KP + \frac{\partial}{\partial y}KQ + \frac{\partial}{\partial z}KR\right)}_{4\pi\rho}d\varpi$$

$$+ \frac{1}{8\pi}\int V\underbrace{(lKP + mKQ + nKR)}_{4\pi\sigma}dS = \frac{1}{2}\Sigma V e\, d\varpi + \frac{1}{2}\Sigma V\sigma\, dS.$$

Si donc, en tout point du volume, on a

$$e = 0,$$

la première intégrale est nulle et si aux limites du champ on a

$$\sigma = 0 \qquad \text{ou} \qquad V = 0,$$

la seconde intégrale disparaît également. Donc $W = 0$ et par suite $E = 0$. Cette démonstration s'applique au cas où le champ est limité par un conducteur qui l'enveloppe entièrement; elle s'appliquerait également à un champ qui s'étendrait à l'infini moyennant certaines hypothèses sur la façon dont V et σ se comportent à l'infini.

Donc, s'il y a une solution au problème de la distribution électrique, cette solution est unique.

Théorie du déplacement de Maxwell (1). — 1° Maxwell imagine que les phénomènes électrostatiques sont dus à une substance particulière que nous appellerons *fluide inducteur*. Dans les diélec-

(1) Ce paragraphe est écrit dans la notation vectorielle qui est exposée dans une autre partie du présent Cours; le lecteur est prié de s'y reporter.

Digitized by Google

triques, dans l'air, dans le vide, ce fluide inducteur se comporte comme un corps élastique, chaque molécule est rappelée vers sa position d'équilibre par une force proportionnelle à l'écart et cet écart ou déplacement est proportionnel à l'intensité du champ.

Soit D le déplacement (composantes fgh), soit E l'intensité du champ; on aura

$$D = \frac{KE}{4\pi}.$$

Si le milieu n'était pas isotrope, on supposerait que D, au lieu d'être proportionnel à E, est une fonction vectorielle linéaire auto-conjuguée de E.

D'après cela, on aura

$$\text{div. } D = e,$$

en appelant e la densité de la quantité d'électricité. C'est là une équation de liaison qui s'impose au déplacement D par la présence des quantités d'électricité e.

Le travail élémentaire de la force E agissant sur le fluide inducteur est égal à

$$\int (E\delta D)\, d\varpi = 4\pi \int \frac{D\delta D}{K}\, d\varpi = 2\pi\delta \int \frac{D^2}{K}\, d\varpi.$$

D'après cela, l'énergie élastique du fluide inducteur, c'est-à-dire l'énergie potentielle du milieu, a pour expression

$$W = 2\pi \int \frac{D^2}{K}\, d\varpi \qquad \text{ou} \qquad \frac{2\pi}{K}\int D^2\, d\varpi,$$

si K a une valeur constante en tous les points du milieu.

Dans cette conception de Maxwell, on voit :

a. Que l'énergie électrique est localisée dans le milieu;

b. Qu'elle est de nature potentielle.

2° Il n'est peut-être pas inutile d'ajouter ici un mot concernant les unités. Nous verrons que la vitesse V de propagation des ondulations électromagnétiques est aussi égale au rapport $[\varepsilon_m] : [\varepsilon_e]$ de l'unité électromagnétique $[\varepsilon_m]$ de quantité d'électricité à l'unité électrostatique $[\varepsilon_e]$ de cette même quantité et qu'elle a pour valeur $\frac{1}{\sqrt{K\mu}}$, K étant le pouvoir inducteur électrique et μ étant la perméabilité

Digitized by Google

magnétique; celle-ci, dans tous les milieux non magnétiques, peut être prise égale à 1 et l'on a alors $V = \frac{1}{\sqrt{K}}$. Si donc, on exprime les quantités d'électricité en unités électromagnétiques, on aura

$$W = 2\pi V^2 \int D^2 \, d\varpi.$$

3° Si le milieu diélectrique n'est pas électrisé, on aura

$$\operatorname{div} D = 0.$$

Si un conducteur est chargé d'une quantité ε d'électricité, on aura

$$\int D_n \, dS = \varepsilon,$$

l'intégrale étant prise le long d'une surface quelconque qui enveloppe une fois le conducteur considéré et aucun autre.

Les conditions d'équilibre du champ électrostatique s'obtiendront en écrivant que W est un minimum, ainsi que nous l'indiquions à la fin du paragraphe précédent.

Tous les milieux, même l'air, sont polarisés, et la seule différence est que, dans les diélectriques liquides ou solides, on a $K > 1$, tandis que pour l'air on prend $K = 1$.

Cas particuliers d'équilibre électrostatique. Équation fonctionnelle de Robin. — Considérons un conducteur isolé en équilibre électrostatique.

Dans tout le champ on a $\rho = 0$, le milieu n'étant pas électrisé. L'expérience apprend aussi qu'il n'y a pas de masses laplaciennes, c'est-à-dire que le champ est irrotationnel, sans tourbillon. On a donc partout $\mu = \tau = 0$. Enfin, la surface du conducteur est une surface de discontinuité. A l'intérieur, le champ est nul. A l'extérieur, le champ aboutit normalement au conducteur.

Reportons nous maintenant au théorème de Vaschy, lorsque le *point* $(\alpha\beta\gamma)$ où l'on examine le champ est sur une surface de discontinuité et admettons $\rho = \mu = \tau = 0$. Soient σ la densité en $(\alpha\beta\gamma)$ et σ' la densité sur l'élément de surface dS' en xyz.

On a

$$4\pi\sigma = l_1(X_1 - X_2) + m_1(Y_1 - Y_2) + n_1(Z_1 - Z_2),$$

$$\frac{X_1 + X_2}{2} = \int_S \sigma' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS' \quad \text{ou} \quad = -\int_S \sigma' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \alpha} dS'.$$

Digitized by Google

Prenons comme axe des x la normale au conducteur dirigée vers l'intérieur du champ, au point $(\alpha\beta\gamma)$ situé sur ce conducteur. On aura

$$X_2 = Y_2 = Z_2 = 0, \qquad l_1 = 1, \qquad m_1 = n_1 = 0$$

et

$$4\pi\sigma = X_1, \tag{1}$$

$$\frac{X_1}{2} = -\int \sigma' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \alpha} dS' = \int \sigma' \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\alpha} dS'. \tag{2}$$

Mais on a

$$dr = d\alpha \cos(r, n),$$

n désignant, cette fois, la normale dirigée vers l'intérieur du conducteur, au point $(\alpha\beta\gamma)$.

D'où, en éliminant X_1 entre les équations (1) et (2),

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_S \sigma' \frac{1}{r^2} \cos(r, n) dS'. \tag{A}$$

Dans cette formule, rien n'empêche de considérer la surface d'intégration S comme constituée par l'ensemble des surfaces individuelles des divers conducteurs répartis dans le champ.

Si l'on suppose l'existence de charges q_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ situées en des points intérieurs au champ et extérieurs aux conducteurs, on arrivera de la même façon à la formule

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\sigma' \cos(r, n)}{r^2} dS' + \frac{1}{2\pi} \sum_1^p \frac{q_i \cos(r_i, n)}{r_i^2}. \tag{B}$$

Il suffit, par exemple, de supposer qu'on applique la formule précédente au cas où l'un des conducteurs contient une charge q_i et où ses dimensions sont infiniment petites, de sorte que r peut être remplacé par r_i pour tous les éléments de la charge q_i.

La formule

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_S \sigma' \frac{\cos(r, n)}{r^2} dS' \tag{3}$$

se prête à une vérification intéressante.

Considérons un conducteur unique. Calculons sa charge totale. On a, pour la surface totale de ce conducteur S_1,

$$\int_S \sigma \, dS = \frac{1}{2\pi} \int_{S_1} dS \int_{S_1} \frac{\sigma' \cos(r, n)}{r^2} dS' = \frac{1}{2\pi} \int_{S_1} \sigma' \, dS' \int_{S_1} \frac{\cos(r, n)}{r^2} dS.$$

Digitized by Google

Or $\frac{\cos(r, n)}{r^2} dS$ est l'angle solide sous lequel l'élément dS de S_1 est vu du centre de gravité de dS'; on a donc

$$\int_{S_1} \frac{\cos(r, n)}{r^2} dS = 2\pi.$$

D'où résulte

$$\int_{S_1} \sigma \, dS = \int_{S_1} \sigma' \, dS'. \tag{4}$$

Chacune de ces intégrales représente une manière d'exprimer la charge totale; ces deux manières sont équivalentes : c'est en cela que consiste la vérification.

Supposons maintenant que σ' soit une fonction quelconque du point (xyz) de la surface S. La formule (3) définira une nouvelle fonction σ d'un point quelconque $(\alpha\beta\gamma)$ de la même surface. Le calcul précédent subsistera et l'égalité (4) sera vérifiée par la nouvelle fonction σ.

Ainsi donc, si nous répartissons sur une surface une charge totale M avec une densité σ', par unité de surface, suivant une loi d'ailleurs quelconque de sorte qu'elle ne sera pas d'elle-même en équilibre, nous pouvons en déduire une autre répartition σ de la même charge, au moyen de la formule (3). On pourrait opérer sur σ, comme on l'a fait sur σ' et ainsi de suite indéfiniment, et se demander si l'on ne pourrait pas arriver ainsi à la limite à une charge en équilibre naturel. C'est ce qu'on peut démontrer effectivement, s'il s'agit d'une surface fermée convexe, au moyen d'une méthode due à Robin. Nous nous abstiendrons de reproduire cette démonstration; mais nous ne pouvons nous empêcher de reproduire l'application que Robin a faite de de son équation fonctionnelle au cas de la distribution sur une sphère conductrice soumise à l'influence d'un point électrisé.

Influence d'un point électrisé sur une sphère conductrice. — En appelant R le rayon de la sphère, V son potentiel constant, q_1 la charge du point, d_1 sa distance au centre de la sphère, on a visiblement

$$\frac{\cos(r, n)}{r} = \frac{1}{2R},$$

$$d_1^2 = R^2 + r_1^2 - 2Rr_1\cos(r, n),$$

$$V = \int_S \frac{\sigma' \, dS'}{r} + \frac{q_1}{r_1}.$$

Digitized by Google

Si dans l'équation (B) on porte les valeurs des cosinus tirées des deux premières relations et qu'on tienne compte de la troisième, on obtient

$$\sigma = \frac{V}{4\pi R} - \frac{q_1}{4\pi R}\frac{d_1^2 - R^2}{r_1^3}.$$

Cette formule résout le problème posé.

Diélectrique dans un champ électrostatique. — Considérons un corps diélectrique U placé dans l'air; soit S la surface de ce corps. Appelons $h_1(X_1Y_1Z_1)$ le champ dans l'air, h_2 $(X_2Y_2Z_2)$ le champ dans le diélectrique; en un point P $(\alpha\beta\gamma)$ de la surface S, les composantes du champ, suivant la normale PN menée dans l'air (cosinus directeurs l, m, n), sont $(h_1)_n$ et $(h_2)_n$.

On a, tout d'abord, pour exprimer que la surface S n'est pas électrisée, la relation suivante :

$$k_1(h_1)_n = k_2(h_2)_n \tag{1}$$

dans laquelle k_1 et k_2 sont les pouvoirs diélectriques de l'air et du corps.

La surface S est une surface de discontinuité pour l'intensité du champ électrique. D'après le théorème de Vaschy, on aura, sur la surface S, une masse fictive σ, donnée par la formule

$$4\pi\sigma = (h_1)_n - (h_2)_n. \tag{2}$$

L'expérience montre que la distribution du champ électrique est irrotationnelle, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de masses vectorielles. Dans ces conditions, le théorème de Vaschy donne, en un point P de la surface de discontinuité S,

$$\frac{X_1 + X_2}{2} = -\frac{\partial V}{\partial \alpha}, \quad \dots \quad \text{avec} \quad V = \int \rho \frac{d\varpi}{r} + \int \sigma \frac{dS}{r}. \tag{3}$$

Or, on a

$$(h_1)_n = lX_1 + mY_1 + nZ_1,$$
$$(h_2)_n = lX_2 + mY_2 + nZ_2,$$
$$l\frac{\partial V}{\partial \alpha} + m\frac{\partial V}{\partial \beta} + n\frac{\partial V}{\partial \gamma} = \frac{dV}{dn},$$

dn désignant l'élément de normale dirigée du corps vers l'air.

Digitized by Google

D'où

$$\frac{(h_1)_n + (h_2)_n}{2} = -\frac{dV}{dn}. \tag{4}$$

Et par élimination de h_1 et de h_2 entre (1), (2) et (4), il vient enfin l'équation fonctionnelle

$$2\pi\sigma = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}\left(-\frac{dV}{dn}\right).$$

Sphère diélectrique uniformément polarisée. — Considérons une sphère de centre O (abc) et de rayon R, constituée par une certaine substance diélectrique de pouvoir diélectrique k_2, placée dans un milieu ayant un autre pouvoir inducteur spécifique k_1. Imaginons que dans ce milieu se trouvent réparties des charges électriques, telles que le champ qui leur serait dû, s'il existait seul, aurait une intensité h constante en sens, grandeur et direction.

Le champ électrique, résultant de l'action de ces charges et de la présence de la sphère diélectrique, éprouvera une discontinuité normale à la surface de séparation de la sphère et du milieu; et il en résultera, au point de vue de la détermination du champ, par le théorème de Vaschy, une densité électrique σ en chaque point P $(\alpha\beta\gamma)$ de la sphère. La présence de ces masses σdS, dont il faut tenir compte dans le calcul du potentiel, fait dire que la sphère s'est polarisée. Nous cherchons une expression de σ, qui est une fonction de la position du point P $(\alpha\beta\gamma)$.

Pour résoudre ce problème, on peut se reporter à l'équation fonctionnelle

$$2\pi\sigma = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}\left(-\frac{dV}{dn}\right)$$

que nous venons d'établir. La dérivée normale $-\frac{dV}{dn}$ est la somme de la dérivée normale du potentiel dû aux charges fictives σ réparties à la surface de la sphère et de la composante normale du vecteur h, dans le sens de la normale extérieure à la sphère. Cette dernière composante a la valeur

$$h\frac{x - a}{R}.$$

Soient σ' la densité électrique, en un point M (xyz) de la sphère. dS l'élément de surface en ce point, r la distance MP, $r = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}$.

Digitized by Google

L'équation fonctionnelle à résoudre est la suivante :

$$\sigma = \frac{1}{2\pi}\frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2}\left(-\frac{d}{dn}\int\frac{\sigma' dS}{r} + h\frac{\alpha - a}{R}\right).$$

Mais, si j'appelle φ l'angle de PO avec PM, j'ai

$$dn\cos\varphi = dr$$

et cette équation devient

$$\sigma = \frac{1}{2\pi}\frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2}\left(\int\frac{\sigma'\cos\varphi}{r^2}dS + h\frac{\alpha - a}{R}\right)$$

ou bien, comme on a $2R\cos\varphi = r$,

$$\sigma = \lambda\int\frac{\sigma' dS}{r} + \mu(\alpha - a),$$

en posant

$$\lambda = \frac{1}{4\pi R}\frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2}, \qquad \mu = \frac{h}{2\pi R}\frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2}.$$

Si λ est suffisamment petit, on peut essayer la méthode des approximations successives, en posant tout d'abord

$$\sigma = \mu(\alpha - a), \qquad \sigma' = \mu(x - a).$$

Reportons cette valeur de σ' dans l'équation fonctionnelle.

On a, pour seconde approximation,

$$\sigma = \lambda\mu\int_S\frac{x - a}{r}dS + \mu(\alpha - a).$$

Calculons donc $\int_S\frac{x - a}{r}dS$.

On a pour cette intégrale l'expression

$$R\int_S\frac{x - a}{R}\frac{dS}{r} = R\int l\frac{dS}{r}$$

en appelant l le cosinus directeur relatif à l'axe des x de la normale en M dirigée vers l'extérieur. Appliquons maintenant la formule d'Ostrogradski : soit $Q(xyz)$ un point intérieur de la sphère et r_{QP} la distance des points Q et P ; appelons $d\varpi_Q$ l'élément de volume situé au point Q, on a

$$\int l\frac{dS}{r} = \int\frac{\partial\frac{1}{r_{QP}}}{\partial x}d\varpi_Q.$$

Digitized by Google

Mais cette intégrale représente précisément la composante suivant l'axe des x de l'intensité du champ électrique, dû à une masse $\rho = 1$ répandue d'une façon uniforme dans le champ d'intégration. Or, on sait que cette intensité a pour valeur $\frac{4}{3}\pi r_{P0}$ et que sa composante suivant l'axe des x est $\frac{4}{3}\pi(\alpha - a)$.

On a donc

$$\int \frac{x-a}{r}\, dS = \frac{4\pi R}{3}(\alpha - a);$$

d'où

$$\sigma = \left(\frac{4\pi R}{3}\lambda\mu + \mu\right)(\alpha - a).$$

Ainsi, la seconde approximation nous donne une valeur de σ proportionnelle à $\alpha - a$; il en serait évidemment de même des approximations suivantes et il convient de chercher la limite vers laquelle tend le coefficient de proportionnalité. On y parviendra, sans avoir besoin de faire désormais de restriction au sujet de la grandeur du module de λ. S'il était nécessaire de le supposer jusqu'à présent inférieur à une limite déterminée, c'était pour avoir une série convergente en λ. Maintenant, nous posons

$$\sigma = \mu'(\alpha - a)$$

et nous allons déterminer μ' par une substitution directe. On aura évidemment ainsi

$$\mu' = \lambda\mu' \frac{4\pi R}{3} + \mu,$$

d'où

$$\mu' = \frac{\mu}{1 - \frac{4\pi R}{3}\lambda}.$$

En remplaçant μ et λ par leurs valeurs, on obtient la formule suivante, qui résout le problème,

$$\sigma = \frac{3}{4\pi}\frac{k_2 - k_1}{k_2 + 2k_1} h \frac{\alpha - a}{R}.$$

Le coefficient de $\frac{\alpha - a}{R}$ s'appelle l'intensité de la polarisation.

Moment diélectrique d'une sphère diélectrique soumise à l'influence d'un champ uniforme. — Soient m une masse placée au

Digitized by Google

point $O(a, b, c)$ et m' une masse égale à $-m$ placée au point $O'(a+da, b, c)$. Soient P un point de coordonnées $(\alpha\beta\gamma)$, r la distance PO, r' la distance PO'; le potentiel V en P de l'intensité du champ dû aux masses m et m' sera

$$V = \frac{m}{r} + \frac{m'}{r'} = -m\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a}da.$$

Et si l'on appelle $\mathfrak{M} = m\,da$ le moment du système OO', on peut écrire

$$V = -\mathfrak{M}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a}.$$

Cela étant, revenons à la formule du paragraphe précédent et cherchons le potentiel dû aux masses σ. On avait, en appelant $\varkappa$ le coefficient de polarisation,

$$\sigma = \varkappa h\frac{\alpha - a}{R},$$

et le potentiel V est

$$V = \varkappa h\int_S \frac{x-a}{R}\frac{dS}{r} = \varkappa h\int_U \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}d\varpi = -\varkappa h\frac{\partial}{\partial\alpha}\int\frac{d\varpi}{r},$$

S désigne la surface de la sphère, U désigne le volume de la même sphère, le point $P(\alpha\beta\gamma)$ est supposé extérieur à la sphère; la dernière intégrale représente le potentiel $\int\frac{d\varpi}{r}$ d'une sphère homogène, sa valeur est $\frac{4\pi R^3}{3}\frac{1}{r_0}$ en appelant r_0 la distance PO de P au centre O de la sphère. On a donc

$$V = -\varkappa h\frac{4\pi R^3}{3}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{r_0}\right).$$

Par conséquent, en comparant cette formule avec celle qui vient d'être établie, on voit que la sphère diélectrique donne le même potentiel qu'un aimant diélectrique élémentaire dont l'axe serait dirigé suivant l'intensité du champ extérieur, en sens contraire, et de moment $\mathfrak{M}$ égal à

$$+\varkappa h\frac{4\pi R^3}{3},$$

avec

$$\varkappa = \frac{3}{4\pi}\frac{k_2 - k_1}{k_2 + 2k_1}.$$

On voit que $\varkappa h$ est le moment par unité de volume.

Digitized by Google

Action mécanique sur l'élément de volume d'un champ. — Le théorème de Vaschy nous a permis de trouver que les forces s'exerçant sur un volume U pris dans le champ font équilibre à des pressions ou tensions s'appliquant sur les surfaces qui limitent ledit volume. Tout se passe comme si les pressions et tensions dont nous avons donné l'expression existaient réellement.

Cependant, en toute rigueur, le problème est indéterminé. Si, en effet, u, v, w sont les composantes d'un vecteur, tel qu'on ait

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

l'intégrale de volume

$$\int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\varpi$$

sera nulle et, par suite, aussi l'intégrale de surface

$$\int (lu + mv + nw)\, dS,$$

de sorte qu'on peut ajouter u, v, w respectivement aux composantes des tensions obtenues précédemment; on aurait

$$p_x + u, \quad p_y + v, \quad p_z + w.$$

Le problème est donc indéterminé; nous pouvons cependant tenir les formules trouvées pour exactes, car à la surface des conducteurs elles donnent pour la tension normale $\frac{1}{2} E_n \sigma dS$, ce qui doit bien être la force s'exerçant réellement sur la charge σdS et ce qu'on peut vérifier expérimentalement dans l'électromètre absolu. Les pressions normales aux lignes de force se manifestent par la façon dont une lame diélectrique est aspirée entre les lames d'un condensateur à air.

Les formules données par Maxwell pour les tensions et pressions sont donc valables en des points où le diélectrique est homogène, mais ces formules resteraient les mêmes si le milieu variait d'une façon continue, et si l'on ne voit dans les actions à distance que des actions fictives, les pressions et tensions en un point ne doivent dépendre que des valeurs P, Q, R et K en ce point et pas du tout des valeurs P, Q, R en des points différents, où le pouvoir inducteur spécifique serait différent; de même peu importe qu'en ces points éloignés le vecteur E(PQR) ne dépende pas d'un potentiel.

Digitized by Google

Nous sommes ainsi amenés à attribuer à l'action exercée sur une portion du champ une plus grande généralité quand elle est exprimée en fonction des tensions et pressions qui s'exercent sur chaque élément de la surface qui enveloppe ladite portion du champ que quand elle est exprimée par l'action sur les charges, action dont nous étions partis tout d'abord.

On peut tenir pour valable l'expression de ces tensions et pressions, quand même il n'y aurait pas de potentiel, ni homogénéité du milieu et nous pouvons rechercher quelle serait alors la force F_x, F_y, F_z la plus générale s'exerçant, en ce cas, sur chaque élément de volume. Nous partons alors de l'intégrale de surface et nous la transformons en intégrale de volume, en supposant $\mu \neq 0$ et K fonction de x, y, z.

Il faudrait ajouter dans l'expression de F, antérieurement admise, un terme variable avec K.

C'est de la même façon que K a été introduit dans la définition de la quantité d'électricité; partant de $\int \frac{KE_n}{4\pi} dS$, on a obtenu

$$4\pi e = \Sigma \frac{\partial KP}{\partial x}.$$

Nous aurons donc, comme on le verrait aisément,

$$F_x = Pe + K(Q\mu_z - R\mu_y) - \frac{P^2 + Q^2 + R^2}{8\pi} \frac{\partial K}{\partial x}$$

et deux autres formules analogues, avec

$$4\pi\mu_x = \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \cdots$$

Ces formules seraient applicables si, outre le champ électrostatique dépendant des quantités e, nous avions des quantités μ résultant de la variation du flux d'induction magnétique. La variation de la densité du flux magnétique par unité de temps donne lieu à ce vecteur μ, qui est soumis de la part de l'intensité du champ électrique à une action égale à celle qu'un conducteur parcouru par un courant permanent subit sous l'action d'une intensité de champ magnétique.

Autrement dit, quand les curls $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$, ..., ne sont pas nuls, il y a variation avec le temps de l'intensité magnétique, et le vecteur

Digitized by Google

représentant cette variation par unité de temps est analogue à une espèce de courant sensible au champ électrique.

Si maintenant le milieu n'est pas homogène, on a en outre une force proportionnelle au carré du champ et à la variation du pouvoir inducteur spécifique.

Système de conducteurs dans le champ électrostatique. — L'énergie contenue dans le champ électrostatique a pour expression

$$W = \int \frac{K E^2}{8\pi} d\varpi.$$

On peut considérer l'état d'équilibre existant comme la superposition de plusieurs états d'équilibre :

Le premier, où le premier conducteur seul sera chargé de la quantité q_1, les autres portant des charges nulles et où le champ sera h_1 ; le deuxième, où le deuxième conducteur seul sera chargé de la quantité q_2, où le champ sera h_2, etc., de sorte que

$$\overline{E} = \Sigma \overline{h}_i;$$

d'où

$$\begin{aligned} E^2 &= (X_1 + X_2 + \dots)^2 + (Y_1 + Y_2 + \dots)^2 + (Z_1 + Z_2 + \dots)^2 \\ &= h_1^2 + h_2^2 + \dots + 2 h_1 h_2 \cos(h_1, h_2) + \dots, \end{aligned}$$

d'où

$$W = \int \frac{K}{8\pi} (h_1^2 + h_2^2 + \dots + 2 h_1 h_2 \cos(h_1, h_2) + \dots) d\varpi.$$

Mais quand il y a un seul conducteur chargé, 1 par exemple, en vertu du principe même de superposition, l'intensité h_1 en un point du champ, est évidemment proportionnelle à la charge q_1 de ce conducteur. On voit donc que W est une fonction quadratique des charges des conducteurs :

$$W = p_{11} q_1^2 + \dots + 2 p_{12} q_1 q_2 + \dots.$$

On en déduit, d'après la propriété bien connue des fonctions homogènes (du second degré)

$$W = \frac{1}{2} \Sigma q_i \frac{\partial W}{\partial q_i};$$

Mais, d'autre part, si V_i est le potentiel du conducteur C_i, l'énergie est aussi égale à

$$W = \frac{1}{2} \Sigma q_i V_i.$$

Digitized by Google

On voit donc, en comparant ces deux expressions et en remarquant que les charges des conducteurs sont indépendantes, que

$$V_i = \frac{\partial W}{\partial q_i};$$

$\frac{\partial W}{\partial q_i}$ étant une fonction linéaire des charges, les potentiels sont des fonctions linéaires des charges et inversement.

On peut exprimer W en fonction quadratique, soit des charges, soit des potentiels. On désignera, alors W selon le cas, soit par W_q, soit par W_v. Cela posé, imaginons que l'énergie d'un système dépende des charges et, en outre, d'un paramètre géométrique variable φ (dans un électromètre à quadrants, par exemple, ce sera l'angle de l'aiguille avec une direction fixe). Si Φ est la force électrique, le travail de cette force dans le déplacement $\delta\varphi$ sera $\Phi\delta\varphi$ et égal à la diminution d'énergie du système

$$\Phi\,\delta\varphi = -\,\delta W_q.$$

Or, on a

$$2W - W_q - W_v = 0,$$

$$2\,\delta W - \delta W_q - \delta W_v = 0; \tag{1}$$

puis

$$2\,\delta W = q_1\,\delta V_1 + q_2\,\delta V_2 + \ldots + V_1\,\delta q_1 + V_2\,\delta q_2 + \ldots,$$

$$\delta W_q = \frac{\partial W}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial W}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial W_q}{\partial \varphi}\delta\varphi,$$

$$\delta W_v = \frac{\partial W}{\partial V_1}\delta V_1 + \frac{\partial W}{\partial V_2}\delta V_2 + \ldots + \frac{\partial W_v}{\partial \varphi}\delta\varphi.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (1), il vient

$$\Sigma\left(V_r - \frac{\partial W_q}{\partial q_r}\right)\delta q_r + \Sigma\left(q_s - \frac{\partial W_v}{\partial V_s}\right)\delta V_s - \left(\frac{\partial W_q}{\partial \varphi} + \frac{\partial W_v}{\partial \varphi}\right)\delta\varphi = 0.$$

Or, on a

$$V_r - \frac{\partial W_q}{\partial q_r} = 0.$$

Supprimant la première somme, l'équation ne contient plus que des variations indépendantes ; par suite

$$q_s = \frac{\partial W_v}{\partial V_s}$$

et

$$\frac{\partial W_q}{\partial \varphi} + \frac{\partial W_v}{\partial \varphi} = 0.$$

Digitized by Google

Donc, si Φ est la force électrique qui produit le déplacement $\delta\varphi$, on a

$$\Phi = -\frac{\partial W_q}{\partial \varphi} = +\frac{\partial W_v}{\partial \varphi}.$$

On peut énoncer ce résultat ainsi :

La variation d'énergie d'un système de conducteurs déformé à potentiels constants est égale et de signe contraire à la variation d'énergie de ce système pour une même déformation à charges constantes. Il en résulte que, dans une déformation à potentiels constants, l'énergie empruntée à la source extérieure non seulement fournit le travail nécessaire à la déformation, mais encore sert à accroître l'énergie électrostatique du système, d'une quantité égale à ce travail.

Le mode de démonstration employé pour établir l'égalité

$$\frac{\partial W_v}{\partial \varphi} + \frac{\partial W_q}{\partial \varphi} = 0$$

trouve également son application en électrocinétique pour la chaleur Joule et l'énergie magnétique; ce procédé de démonstration s'applique aussi à l'énergie cinétique d'un système en Mécanique rationnelle.

Soient, en effet, T l'énergie cinétique d'un système; q_1, q_2, ... les coordonnées généralisées, c'est-à-dire les variables indépendantes (en vertu des équations de liaisons, les coordonnées peuvent s'exprimer en fonction d'un certain nombre d'entre elles qui deviennent paramètres indépendants). Les vitesses à considérer sont

$$v_1 = \frac{dq_1}{dt}, \qquad v_2 = \frac{dq_2}{dt}, \qquad \ldots.$$

L'énergie cinétique du système est donnée par l'expression

$$2T_v = P_{11}v_1^2 + 2P_{12}v_1v_2 + \ldots,$$

et l'on déduit de là les quantités de mouvement relatives aux variables v

$$\frac{\partial T_v}{\partial v_1} = p_1 = P_{11}v_1 + P_{12}v_2 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Or la fonction T étant essentiellement positive, on peut toujours résoudre ces équations linéaires et exprimer les v en fonction des p. Car, si le déterminant s'annulait, on pourrait trouver un système de

Digitized by Google

valeurs non toutes nulles pour les v et tel que

$$2T = \Sigma \frac{\partial T}{\partial v} v$$

s'annulât, parce que tous les $\frac{\partial T}{\partial v}$ seraient nuls, ce qui est impossible, car, dès qu'il y a vitesse, on a $T > 0$.

Donc, on peut prendre les p pour variables indépendantes; soit alors

$$2T_p = Q_{11} p_1^2 + 2Q_{12} p_1 p_2 + \dots$$

l'expression de T en fonction des quantités de mouvement.

On a, de plus, d'après le théorème des fonctions homogènes,

$$2T_{pv} = p_1 v_1 + p_2 v_2 + \dots;$$

or, on a évidemment

$$T_p + T_v - 2T_{pv} = 0;$$

d'où

$$\delta T_p + \delta T_v - 2\delta T_{pv} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\Sigma \left(\frac{\partial T_p}{\partial p_1} - v_1 \right) \delta p_1 + \Sigma \left(\frac{\partial T_v}{\delta v_1} - p_1 \right) \delta v_1 + \Sigma \left(\frac{\partial T_p}{\partial q_1} + \frac{\partial T_v}{\partial q_1} \right) \delta q_1 = 0,$$

les q étant des paramètres géométriques indépendants définissant la position du système.

Or

$$\frac{\partial T_v}{\partial v_1} = p_1,$$

les termes en δv disparaissent et, comme il ne reste plus alors dans l'équation que des variations indépendantes, il vient

$$\frac{\partial T_p}{\partial p_1} = v_1, \qquad \dots$$

et

$$\frac{\partial T_p}{\partial q_1} + \frac{\partial T_v}{\partial q_1} = 0, \qquad \dots.$$

Si donc on assimile un système physique à un système mécanique, on voit que la théorie donnera pour le sens des forces d'inertie mises en évidence des forces égales et de signes contraires, suivant que les variables physiques qu'on aura eu à considérer seront assimilées à des vitesses ou à des quantités de mouvement.

Digitized by Google

Application. — Nous allons vérifier dans un cas simple la formule

$$\frac{\partial T_p}{\partial q} + \frac{\partial T_v}{\partial q} = 0,$$

que nous venons d'obtenir.

Considérons, par exemple, un point matériel de masse m tournant autour de l'origine avec une vitesse angulaire ω le long d'une circonférence de rayon r. La force vive est

$$T = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2.$$

La vitesse angulaire ω fera l'office de la variable v, le rayon r fera l'office du paramètre q. On aura

$$p = \frac{\partial T}{\partial \omega} = m \omega r^2.$$

Il viendra donc

$$T = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 = \frac{1}{2} p \omega = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m r^2},$$

$$T_\omega = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2,$$

$$T_p = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m r^2};$$

d'où

$$\frac{\partial T_p}{\partial r} = - \frac{2 p^2}{2 m r^3} = - m \omega^2 r,$$

$$\frac{\partial T_\omega}{\partial r} = + m \omega^2 r.$$

On a donc bien, dans ce cas particulier,

$$\frac{\partial T_p}{\partial r} + \frac{\partial T_\omega}{\partial r} = 0.$$

On peut préciser les idées en imaginant le mécanisme suivant (*fig.* 25). La masse m coulisse sur le rayon OA de la roue R. Elle est maintenue à une distance donnée de l'axe O par un cordon flexible et inextensible qui passe par un trou pratiqué dans l'axe O et vient s'attacher en un point M de l'axe. La roue est mise en mouvement et laissée à elle-même, une fois qu'on lui a communiqué la vitesse de rotation ω.

Alors deux cas peuvent se présenter : ou bien la masse m est prépondérante par rapport à la masse même de la roue, que, pour sim-

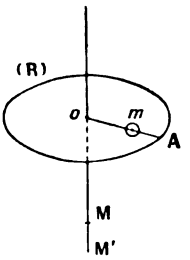
Digitized by Google

plifier, nous supposerons infiniment légère ; ou bien la masse de la roue fait volant et c'est la masse m qui est négligeable par rapport à celle de son support.

Voici alors qu'on agit sur le système en tirant sur le cordon et en venant l'accrocher en un point voisin du point M, en M', par exemple.

Dans le premier cas, où la masse m est prépondérante, cette masse,

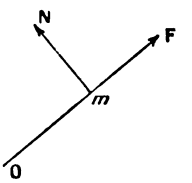
Fig. 25.



en se rapprochant du centre, va augmenter de vitesse, et l'augmentation de force vive aura été empruntée au travail qu'on aura fait en agissant sur le cordon.

Dans le second cas la masse m se rapprochera du centre sans que la vitesse de rotation ω se modifie; par suite, la vitesse de m va diminuer et sa force vive aussi; il en résulte que le volant aura fourni un travail résistant qu'on pourra séparer en deux parties égales entre elles, la première correspondant au travail effectué sur le cordon, la seconde correspondant à la diminution de force vive.

Fig. 26.



Soient F (*fig.* 26) la force qui agit sur la masse m dans la direction du rayon OA et N la pression exercée sur la masse dans le sens du

Digitized by Google

mouvement par la réaction de la roue. On aura

$$m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - \omega r^2\right) = \mathrm{F},$$

$$m\left(r\frac{d\omega}{dt} + 2\frac{dr}{dt}\omega\right) = \mathrm{N}.$$

Disposons de F de façon à passer d'un état de régime r_1 à un autre $r_1 + dr_1$, nous distinguons deux cas :

a. On fait agir le moteur qui entraîne la roue de manière que ω reste constant; alors

$$\mathrm{N} = 2m\omega\frac{dr}{dt},$$

et le travail fourni par N est $\mathrm{N}r\omega\,dt = 2m\omega^2 r\,dr$.

Ce travail représente :

1° Le travail de la force centrifuge $m\omega^2 r dr$;

2° L'accroissement d'énergie cinétique du système

$$\frac{\partial \mathrm{T}\omega}{\partial r}dr = m\omega^2 r\,dr.$$

Ces deux parts sont égales l'une à l'autre.

b. On fait agir le moteur de manière que p reste constant

$$p = mr^2\omega = \text{const.};$$

d'où

$$2r\omega\frac{dr}{dt} + r^2\frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Donc N = 0. Ainsi, en réalité, aucun travail n'est demandé au moteur.

La force centrifuge produit toujours le même travail élémentaire $m\omega^2 r\,dr$, mais l'énergie cinétique diminue de la même quantité, car sa variation est

$$\frac{\partial \mathrm{T}_p}{\partial r}dr = -\frac{\partial \mathrm{T}\omega}{\partial r}dr = -m\omega^2 r\,dr.$$

Tensions et compressions dans le milieu diélectrique. — Maxwell admet que le milieu diélectrique est le siège de tensions suivant le sens des lignes de force et de compressions dans le sens latéral. La

Digitized by Google

démonstration a été donnée de la façon la plus simple par M. Blondlot en se basant sur la formule

$$\frac{\partial \overline{\varpi}}{\partial \varphi} = + \frac{\partial W_v}{\partial \varphi}.$$

Les potentiels des conducteurs étant maintenus constants, on peut décomposer le champ en tranches équipotentielles. D'une tranche à la suivante, la différence de potentiel est δV, quantité que nous supposerons constante. Soient ε l'élément de ligne de force, ω l'élément de surface de niveau $d\varpi = \varepsilon\omega$. On aura

$$W = \frac{1}{8\pi} \int K E^2 \, d\varpi = \frac{1}{8\pi} \int K \frac{\overline{\delta V}^2}{\varepsilon} \omega.$$

Il vient donc

$$\delta W = - \frac{1}{8\pi} \int K E^2 \omega \, \delta\varepsilon + \frac{1}{8\pi} \int K E^2 \varepsilon \delta\omega.$$

La première intégrale correspond au travail de traction sur les bases; la seconde au travail de compression latérale.

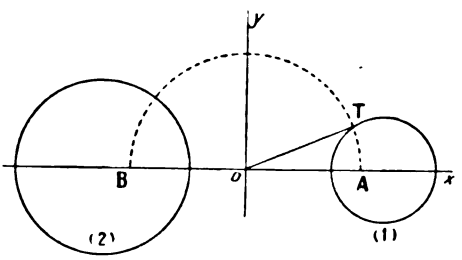
Capacité de deux fils télégraphiques. — Soient

$$(1) \qquad (x - a)^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

$$(2) \qquad (x - a')^2 + y^2 - R'^2 = 0$$

les équations des deux cercles de base des deux cylindres parallèles constitués par nos deux fils télégraphiques (*fig.* 27). Supposons que

Fig. 27.



le fil (1) soit maintenu au potentiel V_1 et le fil (2) au potentiel V_2. Supposons que l'axe des y soit l'axe radical des deux cercles, alors on aura

$$a^2 - R^2 = a'^2 - R'^2.$$

Digitized by Google

Rabattons la tangente OT menée par l'origine à l'un ou à l'autre cercle en OA et OB sur l'axe des x, soit

$$OA = \alpha \qquad \text{et} \qquad OB = -\alpha.$$

On aura

$$\alpha = \sqrt{a^2 - R^2}.$$

Cela posé, nous remarquerons que, si l'on pose

$$x - \alpha + y\sqrt{-1} = re^{i\varphi},$$
$$x + \alpha + y\sqrt{-1} = r'e^{i\varphi'},$$

on peut déterminer les constantes λ et μ de façon que les équations

$$\frac{r}{r'} = \lambda \qquad \text{et} \qquad \frac{r}{r'} = \mu$$

soient les équations de nos deux cercles de base. Pour s'en rendre compte, il suffit de faire l'identification.

L'équation $\frac{r}{r'} = \lambda$ donne

$$x^2 + y^2 - 2\alpha\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}x + \alpha^2 = 0;$$

il suffira donc de choisir λ de façon qu'on ait

$$a = \alpha\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}.$$

Il suffirait de même de prendre pour μ la valeur donnée par

$$a' = \alpha\frac{1+\mu^2}{1-\mu^2}.$$

Les cercles de bases sont situés de part et d'autre de Oy.

Si le cercle (1) défini par le paramètre λ est à droite de l'axe des y, a est positif et plus grand que α; on a donc $\lambda < 1$, ce qui est d'ailleurs évident puisque $r < r'$. Si le cercle (2) est à gauche de Oy, on aura $a' < 0$, $r > r'$ et $\mu > 1$. Cela posé, je considère la fonction

$$2\log\frac{x - \alpha + y\sqrt{-1}}{x + \alpha + y\sqrt{-1}} = P + Q\sqrt{-1} = 2\log\frac{r}{r'} + 2\sqrt{-1}(\varphi - \varphi').$$

Cette fonction est une fonction de $x + y\sqrt{-1}$; elle a une dérivée et, par suite, on a

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x};$$

Digitized by Google

d'où

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

Je dis qu'on a une distribution de l'intensité du champ électrique admissible en prenant pour les composantes de l'intensité du champ

$$X = -\frac{\partial P}{\partial x},$$
$$Y = -\frac{\partial P}{\partial y},$$
$$Z = 0.$$

L'équation précédente exprime, en effet, que la densité de l'électricité dans le volume compris entre les deux fils est nulle. De plus, nous allons montrer que la quantité totale d'électricité est nulle, que le fil (1) a une charge égale et contraire à la charge du fil (2) et que la charge sur une surface enveloppe reculée à l'infini est nulle. Il suffit de considérer les charges par unité de longueur dans le sens de l'axe des z.

Soit q, la charge répartie sur une surface cylindrique quelconque ayant pour base une courbe fermée C, entre les deux plans $z = 0$ et $z = 1$ par exemple. En appelant l, m les cosinus directeurs de la normale extérieure à la courbe C, on aura

$$4\pi q = \int (l X + m Y)\, ds.$$

Calculons les cosinus directeurs l, m; supposons que l'arc ds soit considéré comme positif, quand on décrit la courbe C dans le sens direct, celui qui amène Ox sur Oy par une rotation de 90°. Le vecteur ds aura pour composantes dx et dy et ces quantités seront susceptibles de signe. On aura

$$l\,dx + m\,dy = 0,$$

d'où

$$\frac{dx}{m} = \frac{dy}{-l} = \pm ds.$$

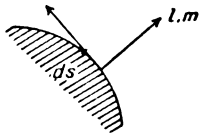
Il s'agit de savoir le signe à choisir; à cet effet, considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} l & m \\ dx & dy \end{vmatrix} = l\,dy - m\,dx = \pm ds.$$

Digitized by Google

Il ne peut s'annuler. Or, remarquons que si on laisse à gauche l'aire enveloppée (*fig.* 28), le vecteur (l, m) et le vecteur (dx, dy)

Fig. 28.



sont situés respectivement comme Ox par rapport à Oy. Si donc on porte ds sur Oy et (l, m) sur Ox, le déterminant se réduit à

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ds \end{vmatrix} = + ds.$$

Il faut donc prendre le signe + dans le déterminant. On a alors

$$dx = - m\, ds,$$
$$dy = + l\, ds,$$

et, par suite, on aura

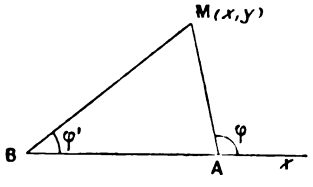
$$4\pi q = \int (- Y\, dx + X\, dy)$$

ou, en vertu des relations

$$X = - \frac{\partial P}{\partial x} = - \frac{\partial Q}{\partial y},$$
$$Y = - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$
$$4\pi q = - \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right).$$

Donc $4\pi q$ est égal à la variation de Q quand on fait un tour en sens inverse du cercle trigonométrique.

Fig. 29.



Mais ici (*fig.* 29), on a

$$Q = 2(\varphi - \varphi'),$$

Digitized by Google

$\varphi - \varphi'$ étant l'angle sous lequel on voit AB à partir du point M de coordonnées x, y.

Si donc, on tourne autour d'une courbe enveloppant les deux fils, la variation de φ est égale à la variation de φ' et la quantité totale incluse est nulle. Il faut donc, en vertu de $\Delta P = 0$, que la variation obtenue pour un tour fait sur la circonférence du cercle (1) soit égale et de signe contraire à la variation obtenue pour un tour fait sur la circonférence du cercle (2). On le vérifie aisément. En particulier, en tournant autour du cercle (2) dans le sens des aiguilles d'une montre, on a

$$\text{Variation de } \varphi = 0,$$
$$\text{Variation de } \varphi' = -2\pi;$$

d'où

$$4\pi q = 4\pi \qquad \text{ou} \qquad q = 1.$$

On a, de même,

$$q = -1 \text{ sur le cercle (1)}.$$

Le problème de distribution dans lequel les deux charges seraient inégales, les charges complémentaires se trouvant rejetées à l'infini, serait beaucoup plus compliqué.

Le cercle (2) est au plus haut potentiel $P_2 = 2\log\mu$; le cercle (1) est au plus bas potentiel $P_1 = 2\log\lambda$, et l'on a pour la capacité, c'est-à-dire pour le rapport de la charge à la différence de potentiel,

$$C = \frac{1}{2\log\frac{\mu}{\lambda}} \qquad \text{ou} \qquad \log\frac{\mu}{\lambda} = \frac{1}{2C}.$$

Je dis que $\frac{\sqrt{-1}}{2C}$ est l'angle imaginaire sous lequel les cercles (1) et (2) se coupent. En effet, on a

$$\log\frac{r}{r'} = \frac{1}{2}\log\frac{(x-\alpha)^2+y^2}{(x+\alpha)^2+y^2}.$$

Posons alors

$$(1) \qquad \begin{cases} y - \alpha i = R_1\cos\Phi_1, & y + \alpha i = R'_1\cos\Phi'_1, \\ x = R_1\sin\Phi_1, & x = R'_1\sin\Phi'_1. \end{cases}$$

On aura

$$(x-\alpha)^2+y^2 = [xi+(y-\alpha i)]\times[-xi+(y+\alpha i)] = RR'e^{i(\Phi_1-\Phi'_1)},$$
$$(x+\alpha)^2+y^2 = [xi+(y+\alpha i)]\times[-xi+(y-\alpha i)] = RR'e^{-i(\Phi_1-\Phi'_1)};$$

Digitized by Google

d'où

$$\log\frac{r}{r'} = \frac{1}{2}\log e^{i2(\Phi_1-\Phi'_1)} = i(\Phi_1-\Phi'_1).$$

Par suite le cercle $\frac{r}{r'} = \lambda$ a aussi pour équation

$$\Phi_1 - \Phi'_1 = \frac{1}{i}\log\lambda,$$

Mais, d'après les formules (1), $\Phi_1 - \Phi'_1$ est l'angle sous lequel du point (xy) on voit le segment qui relie les deux points $(x=0, y=\alpha i)$ et $(x=0, y=-\alpha i)$. Cet angle est constant, comme il était bien évident, puisque ces points sont sur le cercle λ. Nous pouvons faire des remarques analogues pour le cercle μ. On aurait, pour équation de ce cercle, avec une notation analogue,

$$\Phi_2 - \Phi'_2 = \frac{1}{i}\log\mu.$$

La différence constante

$$\pm[\Phi_1 - \Phi'_1 - (\Phi_2 - \Phi'_2)] = \pm\frac{1}{i}\log\frac{\lambda}{\mu}$$

est l'angle sous lequel les deux cercles (λ) et (μ) se coupent ou bien c'est son supplément. Comme a est la distance des centres, et que R et R′ sont les rayons, on aura donc

$$a^2 = R^2 + R'^2 \pm 2RR'\cos\left(\frac{1}{i}\log\frac{\lambda}{\mu}\right).$$

Posons

$$a^2 - R^2 - R'^2 = 2uRR',$$

il viendra

$$2u = \pm\left(e^{\log\frac{\lambda}{\mu}} + e^{-\log\frac{\lambda}{\mu}}\right).$$

Mais comme, en réalité, les deux cercles ne se coupent pas, u est positif, donc il faut prendre le signe +. Alors, si l'on prend comme inconnue $e^{-\log\frac{\lambda}{\mu}}$, on a une équation du second degré dont le produit des racines est égal à l'unité. Comme on a $\mu > 1 > \lambda$, la quantité $e^{-\log\frac{\lambda}{\mu}} = e^{\log\frac{\mu}{\lambda}}$ est plus grande que 1 et il faut prendre la plus grande des deux racines. On a donc, en résolvant,

$$e^{\log\frac{\mu}{\lambda}} = u + \sqrt{u^2-1}$$

Digitized by Google

ou

$$\log\frac{\mu}{\lambda} = \log(u + \sqrt{u^2 - 1}),$$

et par suite, il vient, en définitive, pour la capacité,

$$C = \frac{1}{2\log(u + \sqrt{u^2 - 1})},$$

ce qui est la formule connue que nous nous proposions d'établir.

Distribution de l'électricité sur deux fils parallèles. Cas général. — Je me propose maintenant de rechercher la distribution du potentiel entre les deux cylindres que nous venons de considérer, en supposant que leurs charges respectives par unité de longueur sont q et q'. Dans le cas qui vient d'être traité, on avait $q = -q'$.

Nous allons tout d'abord traiter le cas, où les deux cylindres sont maintenus au même potentiel et où l'ensemble de leurs charges par unité de longueur est égal à $\frac{1}{2}$, de sorte que le potentiel à très grande distance sera sensiblement égal à $\log\frac{1}{r_0}$, en appelant r_0 la distance à l'origine.

Comme le potentiel n'est défini qu'à une constante arbitraire près, nous pouvons d'ailleurs supposer que le potentiel commun des deux cylindres est égal à zéro.

En somme, nous avons ainsi la distribution d'une charge donnée sur un conducteur constitué par le système de deux fils parallèles de diamètres différents.

Ce problème est entièrement défini; le potentiel V est une fonction uniforme, satisfaisant dans tout le volume extérieur aux fils à la condition $\Delta V = 0$ qui exprime que le milieu est à l'état neutre (non électrisé, $\rho = 0$); de plus on aura $V = 0$, à la surface des fils; enfin à l'infini on aura

$$V \sim \log\frac{1}{r}.$$

Admettons que ce problème soit résolu.

Soient q_1 la charge du premier cylindre, q_2 celle du second, avec $q_1 + q_2 = \frac{1}{2}$. Nous allons en déduire la solution du problème plus général envisagé, où les charges sont respectivement q et q'.

Digitized by Google

Car soient

$$x q_1 + y = q,$$
$$x q_2 - y = q';$$

d'où

$$x = \frac{q + q'}{q_1 + q_2}, \qquad y = \frac{q q_2 - q' q_1}{q_2 + q_1}.$$

Le potentiel U, qui sera dû aux charges q et q', sera la somme du potentiel xV dû aux charges xq_1 et xq_2 et du potentiel dû aux deux charges y de signes contraires, $+y$ sur le premier cylindre A, $-y$ sur le second B. On aura donc

$$U = xV - 2y \log \frac{r}{r'} + \text{const.}$$

Considérons, enfin, la formule

$$U = \frac{1}{2}(q + q')V + \frac{V' - V''}{\log\lambda - \log\mu} \log \frac{r}{r'} - \frac{V' \log\mu - V'' \log\lambda}{\log\lambda - \log\mu},$$

qui dérive de la précédente, en remplaçant x par sa valeur et en donnant à y et à la constante arbitraire des valeurs convenablement choisies; on voit que pour $\frac{r}{r'} = \lambda$, c'est-à-dire sur le cylindre λ, on a

$$U = V';$$

on a, de même, sur le cylindre (μ)

$$U = V''.$$

Cette formule résout donc le cas de distribution naturelle où la charge $(q + q')$ est répartie sur les fils, quand l'un est maintenu au potentiel V', et l'autre au potentiel V''.

Comme dans un champ complet, la somme totale des charges est toujours algébriquement égale à zéro, il faut supposer que la charge complémentaire $-(q + q')$ est rejetée à l'infini sur une enceinte qui enveloppe complètement le milieu qui entoure les fils.

Revenons donc au problème de la détermination de V. Nous tirerons la solution de la considération des fonctions d'une variable imaginaire. Considérons, à cet effet, la fonction

$$F = \log[\operatorname{tang}(A + Bi) - \operatorname{tang} C],$$

que nous écrirons $P + Qi$ en séparant la partie réelle P de la partie

Digitized by Google

purement imaginaire Qi. Un calcul facile donne

$$P = \frac{1}{2}\log\frac{\cos 2Bi - \cos 2(A-C)}{(\cos 2Bi + \cos 2A)\cos^2 C},$$

$$Q = \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{i}\,\frac{\sin 2Bi\cos C}{\sin(2A-C) - \sin C\cos 2Bi}.$$

Posons maintenant

$$A + Bi = \frac{\pi}{2}\,\frac{\log\left(\frac{1}{\lambda\mu}\,\frac{z-a}{z-a'}\right)}{\log\frac{\lambda}{\mu}},$$

$$z - a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
$$z - a' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi'),$$

$$A = \frac{\pi}{2}\,\frac{\log\frac{1}{\lambda\mu}\,\frac{r}{r'}}{\log\frac{\lambda}{\mu}}, \qquad B_k = \frac{\pi}{2}\,\frac{\varphi - \varphi' + 2k.\pi}{\log\frac{\lambda}{\mu}}.$$

φ et φ' sont les angles, compris de o inclus à 2π exclus, entre la direction Ox et les rayons vecteurs r et r' respectivement; k est un nombre entier quelconque positif ou négatif; enfin posons aussi

$$C = \frac{\pi}{2}\,\frac{\log\frac{1}{\lambda\mu}}{\log\frac{\lambda}{\mu}} \qquad \text{ou} \qquad C = -\frac{\pi}{2}\,\frac{\log\lambda + \log\mu}{\log\lambda - \log\mu}.$$

J'appellerai aussi P_k et Q_k les valeurs de P et de Q correspondant à la valeur B_k de B.

Remarquons tout de suite que, dans le champ compris entre les cylindres, la fonction F n'a pas d'autre point critique que le point $\varphi - \varphi' = o$, $\frac{r}{r'} = 1$ qui est situé à l'infini sur l'axe des x.

En effet, on ne peut avoir de point critique que pour

$$\operatorname{tang}(A + Bi) = \operatorname{tang} C$$

ou pour

$$\operatorname{tang}(A + Bi) = \infty.$$

Dans le premier cas, on a

$$A + Bi = C + n\pi.$$

D'où

$$B = o \qquad \text{et} \qquad A = C + n\pi.$$

Digitized by Google

Si $n = 0$, la condition $A = C$ donne $\frac{r}{r'} = 1$ et $B_k = 0$ donne $k = 0$, $\varphi = \varphi'$. C'est le point critique dont il vient d'être question.

Si $n \gtrless 0$, de $A = C$, on tire

$$\frac{r}{r'} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{2n}.$$

Mais comme λ est plus petit que 1 et μ plus grand que 1, on a, pour n et n' entiers, si l'affixe z est située entre les cercles,

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{2n'} < \frac{\lambda}{\mu} < \lambda < \frac{r}{r'} < \mu < \frac{\mu}{\lambda} < \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{2n}.$$

L'égalité précédente ne peut donc avoir lieu, pour aucune valeur de n, positive $+n$ ou négative $-n'$, tant que le point reste compris entre les cercles λ et μ. Donc il ne peut y avoir de point critique de ce genre.

Passons au second cas; on a

$$A + Bi = (2n+1)\frac{\pi}{2}.$$

La condition $B = 0$ ou $B_k = 0$ donne encore $k = 0$, $\varphi = \varphi'$ et $2A = (2n+1)\pi$ donne $\frac{r}{r'} = \lambda\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{2n+1}$. Mais on a pour n et n' entiers, tant que le point est compris entre les cercles λ et μ,

$$\mu\lambda\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{2n'+1} < \frac{\lambda}{\mu}\mu\lambda < \lambda < \frac{r}{r'} < \mu < \mu\lambda\frac{\mu}{\lambda} < \mu\lambda\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{2n+1}.$$

Donc il ne peut y avoir non plus de point critique de ce genre, dans l'espace réservé au champ.

On remarquera en second lieu que la fonction F est choisie de façon qu'on ait $P = \text{const.}$ pour $\frac{r}{r'} = \lambda$ et pour $\frac{r}{r'} = \mu$ quel que soit k. En effet, on aura pour P une valeur indépendante de B et, par suite, de $\varphi - \varphi'$ et de k, si l'on pose

$$\cos 2A + \cos 2(A - C) = 2\cos(2A - C)\cos C = 0;$$

d'où

$$A = \frac{C}{2} + \frac{\pi}{4}(2r+1) \qquad (n \text{ entier}).$$

Digitized by Google

En particulier pour $n = 0$, on a

$$A = \frac{C}{2} + \frac{\pi}{4},$$

ce qui donne, d'après un calcul facile, $\frac{r}{r'} = \lambda$.

Si l'on fait de même $n = -1$, l'égalité

$$A = \frac{C}{2} - \frac{\pi}{4}$$

donne, après un calcul analogue, $\frac{r}{r'} = \mu$.

On aura donc, quel que soit k, pour $\frac{r}{r'} = \lambda$ et pour $\frac{r}{r'} = \mu$,

$$P_k - \frac{1}{2}\log\frac{1}{\cos^2 C} = 0;$$

ce qui montre que les deux cercles sont des surfaces de niveau pour tous les potentiels P_k.

Il nous reste à examiner comment se comporte la fonction P_0 au voisinage du point critique. Il est plus simple d'envisager la fonction F et de voir ce qu'elle devient quand z tend vers l'infini. On a, en se reportant aux valeurs de A, B et C,

$$\operatorname{tang}(A + Bi) - \operatorname{tang} C = \operatorname{tang}\left\{C + \frac{\frac{\pi}{2}}{\log\frac{\lambda}{\mu}}\left[\log\left(1 - \frac{a}{z}\right) - \log\left(1 - \frac{a'}{z}\right)\right]\right\} - \operatorname{tang} C.$$

Mais

$$\operatorname{tang}(x + h) - \operatorname{tang} x = h\frac{1}{\cos^2 0 x}.$$

L'expression précédente est donc égale à

$$\frac{1}{\cos^2 0 C}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\log\frac{\lambda}{\mu}}\left[\log\left(1 - \frac{a}{z}\right) - \log\left(1 - \frac{a'}{z}\right)\right]$$

ou bien

$$\frac{1}{\cos^2 0 C}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\log\frac{\lambda}{\mu}}\,\frac{a' - a}{z}(1 + \varepsilon),$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{z}$. Posons

$$z = r_0 e^{i\psi},$$

Digitized by Google

on aura

$$F = \log\frac{1}{\cos^2\theta C}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\log\frac{\lambda}{\mu}}(a'-a)(1+\varepsilon)e^{-i\psi} + \log\frac{1}{r_0}.$$

On voit donc que F et par suite P_0 tendent vers l'infini comme $\log\frac{1}{r_0}$.

Ces préliminaires étant établis, il reste à examiner une difficulté particulière. Il est bien évident que la fonction P (ou si l'on veut P_k) satisfait à l'équation $\Delta P = 0$ quel que soit k, et que P est constant sur le cercle (λ) et sur le cercle (μ), enfin que P tend vers l'infini comme $\log\frac{1}{r_0}$. Mais cela ne suffit pas pour que P représente le potentiel dans l'espace compris entre les deux cercles. En effet, ce potentiel doit être uniforme. Il n'en est pas ainsi de la fonction P. Car pour une valeur donnée du point (x, y) on a une certaine valeur pour $\frac{r}{r'}$, mais on en a une infinité, différant de $2k\pi$ (k entier) pour $\varphi - \varphi'$. Or, P dépend de k. Il faudrait par suite faire une coupure infranchissable; mais alors les deux bords de la coupure devraient, en vertu du théorème de Vaschy, être considérés comme garnis de certaines masses et le problème serait différent de celui que nous voulons résoudre.

Pour tourner cette difficulté, nous considérons la série, infinie dans les deux sens, procédant suivant les puissances entières de k,

$$V = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{1}{2}\log\frac{\cos 2B_k i - \cos 2(A-C)}{\cos 2B_k i + \cos 2A}.$$

Le terme général est égal à $P_k - \frac{1}{2}\log\frac{1}{\cos^2 C}$ qui est égal à zéro sur les cercles (λ) et (μ). On a bien encore $\Delta V = 0$. D'ailleurs, cette série est absolument et uniformément convergente. En effet, le terme général se décompose en deux termes

$$\frac{1}{2}\log\left[1 - \frac{\cos 2(A-C)}{\cos 2B_k i}\right] + \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{\cos 2A}{\cos 2B_k i}\right).$$

Chacun de ces termes est de la forme

$$\frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{a}{e^{b+ck} - e^{-b-ck}}\right).$$

Digitized by Google

Par raison de symétrie, on peut supposer que c est positif. Si k est positif et infiniment grand, ce terme est comparable à $\frac{1}{2}\frac{a}{e^{ck}}$ qui tend vers zéro plus vite qu'une puissance quelconque de $\frac{1}{k}$, par exemple $\frac{1}{k^2}$. Si k est négatif et infiniment grand, on arrive à une conclusion analogue, ce qui démontre la proposition.

La série étant absolument et uniformément convergente, on aura $V = 0$ sur les cercles (λ) et (μ), et l'on peut effectuer les dérivations conduisant à $\Delta V = 0$.

Mais cette série a pour période 2π par rapport à $\varphi - \varphi'$. Car lorsque $\varphi - \varphi'$ augmente ou diminue de 2π, chaque terme se trouve remplacé par le précédent ou par le suivant. On a donc alors une fonction uniforme de (x, y). Elle résout donc le problème posé, puisque dans le champ considéré elle ne possède aucun point critique et qu'à l'infini elle se comporte comme $\log\frac{1}{r_0} = -\log r_0$.

L'ensemble des deux cylindres est au potentiel zéro et se trouve chargé de la quantité $\frac{1}{2}$.

Comment cette quantité se répartit-elle entre les deux cylindres?

Il y a lieu de considérer la fonction Ω conjuguée de V, comme Q est conjuguée de P.

Nous avions

$$Q = \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{i}\,\frac{\sin 2B\, i\cos C}{\sin(2A - C) - \sin C\cos 2B\, i}.$$

Cet arc tang n'est défini qu'à un multiple de π près; on peut se contenter d'envisager l'arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Alors, quand on remplace B par B_k pour avoir la fonction Q_k conjuguée de P_k, on voit que, lorsque k augmente indéfiniment, Q tend vers la limite $\omega = \operatorname{arc\,tang}(\pm\cot C)$, le signe $+$ ou $-$ étant à prendre suivant que k tend vers l'infini par valeurs positives ou par valeurs négatives. Suivant que k sera positif ou négatif, nous retrancherons de Q_k l'une ou l'autre constante, de sorte que Q_k tendra vers zéro avec $\frac{1}{k}$. J'envisage alors la série

$$\Omega = \sum_{-\infty}^{+\infty}\left[\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{i}\,\frac{\sin 2B_k\, i\cos C}{\sin(2A - C) - \sin C\cos 2B_k\, i} - \omega\right],$$

ω étant égal à $\pm\left(\frac{\pi}{2} + C\right)$.

Digitized by Google

La valeur de C tombe en effet entre o et $-\frac{\pi}{2}$ de sorte que ω sera entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, si l'on suppose que le rayon R du cercle (λ) est plus petit que le rayon R′ du cercle (μ). On a, en effet, comme il est facile de le voir,

$$R = \frac{2\alpha\lambda}{1-\lambda^2}, \qquad R' = \frac{2\alpha\mu}{\mu^2-1},$$

et la relation $R < R'$ donne

$$\frac{(\lambda+\mu)(\lambda\mu-1)}{(1-\lambda^2)(\mu^2-1)} < 0;$$

d'où

$$\lambda\mu - 1 < 0 \qquad \text{ou} \qquad \log\lambda + \log\mu < 0,$$

de sorte que, comme on a

$$\log\lambda - \log\mu < 0,$$

$$C = -\frac{\pi}{2}\frac{\log\lambda + \log\mu}{\log\lambda - \log\mu},$$

C est négatif et inférieur en valeur absolue à $\frac{\pi}{2}$, ce qui justifie notre assertion.

Cela étant, la série Ω est absolument et uniformément convergente. On le verrait par un développement analogue à celui qui nous a servi pour démontrer la convergence de la série V.

Pour savoir quelle est la masse électrique qui est répartie sur le cercle (λ), il suffit de calculer la variation subie par Ω quand l'affixe $x+yi$ décrit le cercle (λ). Comme le cercle λ comprend le point a à son intérieur, φ' reprend la même valeur tandis que φ augmente de 2π. Donc $\varphi - \varphi'$ augmente de 2π. Q_k se change en Q_{k+1} et, par suite, la somme des variations des termes Q_k est égale à la variation éprouvée par Q quand le paramètre $\varphi - \varphi' + 2k\pi$ varie de $-\infty$ à $+\infty$ ou que B varie de $+\infty$ à $-\infty$, car le coefficient de proportionnalité de B avec $\varphi - \varphi' + 2k\pi$ est négatif. Sur la circonférence (λ), on a

$$A = \frac{C}{2} + \frac{\pi}{4},$$

d'où

$$\sin(2A - C) = \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

Digitized by Google

d'où

$$Q = \operatorname{arc\,tang} \frac{\frac{1}{i}\sin 2B\, i\cos C}{1 - \sin C\cos 2B\, i}.$$

Si je pose $Q = \operatorname{arc\,tang} W$, Q est une fonction croissante de W, et l'on a

$$W = \frac{\operatorname{sh} 2B\cos C}{1 - \sin C \operatorname{ch} 2B},$$

$$\frac{dW}{d(2B)} = \cos C \frac{\operatorname{ch} 2B - \sin C}{(1 - \sin C \operatorname{ch} 2B)^2} > 0.$$

Donc W est également une fonction croissante de B. Donc Q est une fonction croissante de B. Donc Q varie toujours dans le même sens. Admettons qu'on fasse varier B de $-\infty$ à $+\infty$, c'est-à-dire φ de $+\infty$ à $-\infty$, la variation éprouvée par Q nous donnera la charge multipliée par π. Faisons $B = -\infty$, il vient $-\frac{\pi}{2} - C$, angle compris entre o et $-\frac{\pi}{2}$. Pour $B = o$, on passe dans le premier quadrant. Enfin pour $B = +\infty$ on arrive à la valeur $\frac{\pi}{2} + C$. La différence est $\pi + 2C$. Divisons par π, il vient

$$\frac{1}{2} + \frac{C}{2\pi}.$$

Sur le cercle μ, on aurait la charge

$$\frac{1}{2} - \frac{C}{2\pi}.$$

Comme C est négatif, c'est le cercle (μ) qui a le plus grand rayon qui a, en valeur absolue, la plus grande charge. Les quantités que nous avions appelées q_1 et q_2 au début de ce problème sont donc

$$q_1 = \frac{1}{2}\frac{\log\mu}{\log\mu - \log\lambda},$$

$$q_2 = \frac{1}{2}\frac{(-\log\lambda)}{\log\mu - \log\lambda},$$

et $\frac{q_1}{q_2}$ est, en quelque sorte, le coefficient de partage de l'électricité entre les deux conducteurs.

Champ électrique du condensateur à faces parallèles. — Le champ

Digitized by Google

électrique le plus simple à considérer est le champ d'intensité constante en sens, grandeur et direction qu'on observe entre les faces parallèles d'un condensateur plan, champ qui, en vertu du théorème de Vaschy, peut être considéré comme dû à des masses, positives sur l'un des plateaux, négatives sur l'autre, réparties avec une densité uniforme $\frac{kh}{4\pi}$. Cependant, comme ici le champ est celui qui s'étend à l'infini entre deux plans parallèles, il y a lieu de faire une vérification, car jusqu'ici le champ d'intégration était fini. Si l'on considère un plan $x = a$ parallèle au plan des yz, chargé, avec une densité égale à l'unité, d'une matière agissant en raison inverse du carré de la distance, on aura pour composantes du champ à l'origine

$$X = -\int\int \frac{dy\,dz}{r^3} a, \qquad Y = -\int\int \frac{dy\,dz}{r^3} y, \qquad Z = -\int\int \frac{dy\,dz}{r^3} z.$$

Calcul de X. — La quantité $dz\,dy \times \frac{a}{r}$ est la projection de l'élément $dy\,dz$ sur un plan perpendiculaire au rayon vecteur r. Par suite $\frac{1}{r^2} dz\,dy \frac{a}{r}$ est l'angle solide, sous lequel, de l'origine, on voit l'élément de surface. Donc X est l'angle solide sous lequel de l'origine on voit le contour qui embrasse l'aire d'intégration. Quand le contour d'intégration s'élargit en tous sens jusqu'à l'infini, la limite de X est 2π. C'est la composante due à un seul plan; si l'on ajoute la composante due à l'autre plan chargé du condensateur, en remarquant que ce second plan est de l'autre côté de l'origine et que sa charge est égale et de signe contraire, on obtient 4π.

Calcul de Y. — Supposons pour simplifier que le contour de l'aire d'intégration soit convexe et soit l la grandeur de sa projection sur l'axe des z. On pourra diviser le contour en deux parties $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ séparées par les points de contact du contour avec une parallèle à l'axe Oy et l'on aura

$$Y = -\int \frac{dy\,dz}{r^3} y = \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dy\,dz = \int_{\mathcal{L}_2} \frac{dz}{r_2} - \int_{\mathcal{L}_1} \frac{dz}{r_1}.$$

Par suite, cette intégrale tendra vers zéro, si, (r_2) étant la distance moyenne des éléments dz sur $\mathcal{L}_2$ et (r_1) la distance moyenne des élé-

Digitized by Google

ments dz sur $\mathcal{L}_1$, on a

$$\lim \frac{l}{(r_2)} = \lim \frac{l}{(r_1)}, \qquad \text{pour } l, (r_1) \text{ et } (r_2) \text{ infinis.}$$

Cette égalité ne sera pas satisfaite en général, si le contour s'élargit d'une façon arbitraire; mais on aura évidemment $Y = Z = 0$, si le contour reste symétrique par rapport aux axes Oy et Oz.

Pour montrer clairement, par un exemple, que Y ne tend pas nécessairement vers zéro, pas plus que Z d'ailleurs, faisons le changement de variables

$$x = a + x',$$
$$y = y',$$
$$z = z'.$$

Les axes des (y') et des (z') sont dans le plan de l'armature considérée. Imaginons que le contour soit limité par les deux droites

$$z' = \pm \alpha,$$

puis du côté des y positifs par le cercle $y'^2 + z'^2 = b^2$ et du côté des y négatifs par le cercle $y'^2 + z'^2 = b'^2$. L'intégrale Y devient

$$\int \frac{dz}{\sqrt{a^2 + y^2 + z^2}} = \frac{2\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{2\alpha}{\sqrt{a^2 + b'^2}}.$$

Cette quantité ne tend vers zéro, lorsque α, b et b' augmentent indéfiniment, que si $\frac{\alpha}{b}$ et $\frac{\alpha}{b'}$ tendent vers une même limite, condition très particulière.

En second lieu, on voit que l'expérience nous donne deux résultats, le premier relatif à l'intensité du champ, le second relatif à la direction de cette intensité. Ces deux résultats ne sont pas indépendants si l'on admet que l'intensité dérive d'un potentiel V satisfaisant à l'équation $\Delta V = 0$. En effet, si l'on suppose que V est une fonction de x seul, l'équation $\Delta V = 0$ se réduit à $\frac{d^2 V}{dx^2} = 0$; d'où l'on déduit

$$\frac{dV}{dx} = \text{const.}$$

Ainsi du moment que les surfaces de niveau sont des plans parallèles, l'intensité est constante. Inversement si l'on suppose que l'intensité est constante en valeur absolue, sans rien spécifier sur sa direction,

Digitized by Google

on en conclut que les surfaces de niveau sont des plans parallèles. En effet, par un changement de variable, ou bien en écrivant que la divergence du flux de force est nulle, on transforme l'équation $\Delta V = 0$ dans l'équation suivante

$$\frac{d^2V}{dn^2} + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\frac{dV}{dn} = 0,$$

R et R′ étant les rayons principaux de courbure au point où le champ a pour intensité $\frac{dV}{dn}$. Si l'intensité du champ est constante, on en déduit $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = 0$. Mais cette équation, vérifiée pour la surface de niveau V, le sera encore pour la surface de niveau $V + dV$; mais, comme $\frac{dV}{dn}$ est constant, ces deux surfaces sont parallèles

$$(dn = \text{const} = \varepsilon).$$

On aura donc

$$\frac{1}{R+\varepsilon} + \frac{1}{R'+\varepsilon} = 0.$$

Combinons cette équation avec la précédente, nous obtenons

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R'} = 0.$$

Donc les surfaces équipotentielles sont des plans et, comme deux surfaces infiniment voisines sont parallèles, ce sont des plans parallèles.

Considérons un point P de la surface d'une des lames conductrices, et de part et d'autre de la surface deux points P_1 et P_2 sur la normale en P, infiniment voisins de P. On sait que tout se passe comme si à l'intérieur du conducteur on avait un champ X_2 nul; soit donc $X_2 = 0$ en P_2. En P_1 on a

$$X_1 = h.$$

En P, on a une densité σ

$$\sigma = \frac{kh}{4\pi}.$$

Enfin en P on a, d'après le théorème de Vaschy appliqué en un point d'une surface de discontinuité,

$$X = \frac{X_1 + X_2}{2} = \frac{X_1}{2} = \frac{h}{2}.$$

Digitized by Google

L'action exercée sur la masse σ placée en P est donc

$$\frac{kh^2}{8\pi} = \frac{1}{k} 2\pi\sigma^2.$$

C'est la force par unité de surface. On peut comparer ce résultat avec celui qui a été donné au paragraphe *Tensions et compressions dans un milieu diélectrique*.

Si, dans l'électromètre absolu, S est la surface mobile entourée par l'anneau de garde, l'action sera égale à

$$\Phi = \frac{kh^2}{8\pi} S.$$

Nous allons maintenant donner les expressions de la charge Q, du potentiel V, de la capacité C et de Φ.

On a

$$V = hd,$$

$$Q = \frac{kh}{4\pi} S,$$

$$C = \frac{kS}{4\pi d}.$$

Enfin on a pour Φ les expressions équivalentes ci-après :

$$\Phi = \frac{1}{2} \frac{kS}{4\pi d} \frac{V^2}{d} = \frac{1}{2} \frac{QV}{d} = \frac{1}{2} \frac{1}{C} \frac{Q^2}{d} = \frac{2\pi Q^2}{kS}.$$

On peut aussi obtenir aisément l'expression de l'énergie.

La force Φ est la force électrique due au champ; elle tend à rapprocher les armatures et fait équilibre à la force F qui les maintient écartées. Lorsque la charge Q est constante, la force F est indépendante de d et si d varie de δd, le travail de la force F est $F\delta d$. Lorsque la charge Q est constante, le système est conservatif et l'énergie sera

$$\int_0^d F\,\delta d = \frac{1}{2} QV = \frac{kh^2}{8\pi} Sd.$$

D'après ce calcul direct on vérifie que l'énergie par unité de volume est bien

$$\frac{kh^2}{8\pi}.$$

Aspiration d'une lame diélectrique entre les plateaux du con-

Digitized by Google

densateur plan. — Considérons encore un condensateur à faces parallèles et supposons que nous y introduisions partiellement une lame diélectrique d'épaisseur égale à la distance des plaques. La surface d'une armature se divise en trois parties S_1, S_2, S_3 ; en regard de S_1 nous aurons pour diélectrique l'air (pouvoir inducteur électrique k_1) et le champ sera sensiblement uniforme; en regard de S_2 nous aurons pour diélectrique la lame introduite partiellement (pouvoir inducteur électrique k_2) et le champ y sera aussi sensiblement uniforme; enfin la région S_3 comprendra les bords des plateaux et de la lame diélectrique où le champ peut ne pas être uniforme. Nous supposons l'écartement d des plateaux très petit par rapport à leurs dimensions. Enfin nous imaginons les plateaux chargés d'une quantité d'électricité invariable, $+Q$ pour l'un, $-Q$ pour l'autre. Cela posé, enfonçons un peu plus la lame diélectrique entre les plateaux et examinons la variation d'énergie du système qui, nous le remarquons expressément, est conservatif. L'énergie localisée dans le volume qui sépare les plateaux a pour expression

$$W = \frac{1}{8\pi} k_1 h^2 S_1 d + \frac{1}{8\pi} k_2 h^2 S_2 d + w,$$

w correspond à la partie S_3.

D'après les hypothèses faites, w peut être considéré comme invariable pendant l'enfoncement de la lame, de même que S_3. Nous avons alors

$$dS_1 + \delta S_2 = 0,$$

$$\delta W = \frac{1}{8\pi}(k_1 - k_2) h^2 \delta S_1 d + \frac{1}{8\pi}(k_1 S_1 + k_2 S_2) 2h \delta h d.$$

Comme la charge est demeurée constante, on a

$$\frac{1}{4\pi} k_1 S_1 h + \frac{1}{4\pi} k_2 S_2 h + q = \text{const.},$$

q correspondant à la partie S_3 qui peut être rendue négligeable par rapport aux autres, et à plus forte raison être considérée comme constante.

On a alors

$$(k_1 - k_2) h \delta S_1 d + (k_1 S_1 + k_2 S_2) \delta h d = 0.$$

D'où

$$\delta W = -\frac{1}{8\pi}(k_1 - k_2) \delta S_2 d h^2,$$

Digitized by Google

δW est de la forme $-p_1 dv_1$, où $dv_1 \equiv \delta S_1 d$ est l'augmentation de volume de la région en regard de S_1.

Il en résulte que, pour augmenter ainsi l'énergie de δW, on a dû appliquer une pression par unité de surface égale à

$$\frac{k_1 - k_2}{8\pi} h^2, \quad \text{de } S_2 \text{ vers } S_1.$$

Par conséquent, la pression électrique tendant à augmenter S_1 aux dépens de S_2 est

$$p_1 = \frac{k_1 - k_2}{8\pi} h^2,$$

par unité de surface.

Imaginons maintenant que tout en enfonçant la lame diélectrique comme précédemment on maintienne constante la différence de potentiel des armatures. Alors h est constant et la variation de W se réduit à

$$\delta W = \frac{k_1 - k_2}{8\pi} h^2 \delta S_1 d.$$

Elle est bien, comme il fallait s'y attendre, égale et de signe contraire à la précédente. La force électrique comptée positivement dans le sens qui tend à accroître S_1 aux dépens de S_2 est une pression qui par unité de surface est égale à $\frac{k_1 - k_2}{8\pi} h^2$.

Comme k_2 est en règle générale plus grand que k_1, c'est S_2 qui s'augmentera aux dépens de S_1, par le simple jeu des réactions électriques.

Pendant cet enfoncement de la lame, l'énergie ira en s'augmentant d'une quantité égale à celle dont elle aurait diminué si le système avait fonctionné à charge constante.

On a, dans ce qui vient d'être exposé, l'exemple d'un corps qui subit des forces électriques, sans être chargé; mais il est polarisé.

Théorie de l'électromètre à « quadrants ». — Cet électromètre se compose de deux conducteurs fixes, chargés à des potentiels connus et constants, V_1 et V_2, et d'une aiguille légère, métallique, mobile, suspendue horizontalement à l'extrémité d'un fil de torsion, et chargée à un potentiel inconnu V qu'on se propose de mesurer par l'angle de déviation de l'aiguille.

Les deux conducteurs fixes sont appelés *quadrants*, en raison de

Digitized by Google

leur forme; l'aiguille pénètre par moitié à l'intérieur de chacun d'eux; quand ils ne sont pas chargés et que l'aiguille seule est électrisée, elle est soumise de leur part à des forces égales et contraires qui se font équilibre, grâce à la symétrie observée dans la construction de l'appareil. Quand les quadrants sont chargés aux potentiels V_1 et V_2 respectivement et que l'aiguille est maintenue au potentiel V, elle dévie d'un angle φ; elle se trouve alors en équilibre sous l'action combinée des réactions électriques et du couple de torsion du fil de suspension. Il s'agit d'établir la forme de la relation qui existe dans l'état d'équilibre entre l'angle φ et le potentiel V.

Nous ferons d'abord une remarque préliminaire, c'est que l'énergie électrostatique d'un système de conducteurs ne dépend pas de la valeur absolue des potentiels, mais seulement de leurs valeurs relatives. Soit, en effet, $W = \int \frac{k}{8\pi}\left(\frac{dV}{dn}\right)^2 d\varpi$ l'énergie électrostatique, d'après l'expression de Maxwell qui la suppose localisée dans le milieu, on peut, sans changer la valeur de W remplacer V par $V - V_0$, V_0 étant un potentiel fixe de référence quelconque; donc, dans l'électromètre, l'énergie électrostatique W, qui, en apparence est fonction des trois potentiels V, V_1 et V_2, ne dépend en réalité que de deux variables et, pour ces deux variables, on peut, si l'on veut, prendre $V_1 - V_2$ et $V - \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$, cette dernière quantité étant égale à $\frac{1}{2}(V - V_1) + \frac{1}{2}(V - V_2)$ ou $\frac{1}{2}[V - V_2 + (V_2 - V_1)] - \frac{1}{2}(V - V_2)$. Ces deux grandeurs ne font intervenir, en effet, que les différences $V_1 - V_2$ et $V - V_2$. Soit donc

$$x = V_1 - V_2,$$
$$y = V - \frac{1}{2}(V_1 + V_2).$$

Soit Φ la force électrique qui fait dévier l'aiguille d'un angle φ. On a

$$dW + \Phi\, d\varphi = 0.$$

Nous avons à envisager d'une part l'énergie électrostatique W, d'autre part l'énergie élastique du fil de suspension $\frac{1}{2} D\varphi^2$. Or, comme le système se déforme à potentiel constant, les sources électriques fournissent, par leur travail interne, une quantité totale d'énergie qui se divise en deux parts égales entres elles, l'une sert à augmenter l'énergie élastique de $D\varphi\delta\varphi$, l'autre sert à augmenter l'énergie élec-

Digitized by Google

trostatique W de $\frac{\partial W}{\partial \varphi}\delta\varphi$. Et l'on a

$$D\varphi = \frac{\partial W}{\partial \varphi}; \qquad \text{or} \qquad \frac{\partial W}{\partial \varphi} = -\Phi;$$

d'où

$$-\Phi = D\varphi.$$

Cela posé, comme W est une fonction homogène et du second degré des potentiels, il en est de même de Φ et l'on peut écrire

$$\Phi = Hx^2 + Lxy + Ky^2.$$

Nous allons développer les coefficients H, L et K suivant les puissances croissantes de l'angle φ; mais, comme nous admettons que l'angle φ reste suffisamment petit, nous pourrons nous arrêter aux premiers termes.

On a tout d'abord $K = 0$, car, par construction, si l'on a $x = 0$, on doit avoir $\Phi = 0$.

En second lieu, quand l'appareil est bien réglé, à des valeurs égales et de signes contraires de y, correspondent des déviations égales et contraires et, par suite, Φ est une fonction impaire de y et de φ. Donc L est une fonction paire de φ, H est une fonction impaire. Nous pouvons nous borner à prendre $H = h\varphi$ et $L = -l$, h et l étant des constantes.

On a alors

$$hx^2\varphi - lxy = -D\varphi,$$

d'où

$$\varphi = \frac{lxy}{D + hx^2}.$$

Comme l'expérience montre que h est positif, le terme hx^2 agit dans le même sens que le couple de torsion directeur. On l'appelle *directeur électrique*.

Pour interpréter le signe de l, il suffit de remarquer que si l'on pose $x = y$ ou $V = V_1$, il vient $\varphi = \varphi_1$ avec

$$\varphi_1 = \frac{lx^2}{D + hx^2},$$

ce qui montre que si l'on choisit pour sens positif des déviations celui dans lequel l'aiguille dérive quand on la met au potentiel du quadrant V_1, l est une quantité positive; or, quand on met l'aiguille au potentiel d'un des quadrants, elle est attirée par l'autre; le sens positif de φ est donc du quadrant (V_1) vers le quadrant (V_2).

Digitized by Google

CHAPITRE II.

ÉLECTROCINÉTIQUE.

Par électrocinétique, j'entends l'étude de la répartition des courants permanents.

Le fait fondamental, c'est que les courants permanents, produits dans les conducteurs par des piles constantes, engendrent dans l'espace extérieur aux conducteurs un champ électrique stable. Ce champ électrique dépend à la fois de la répartition des courants et de celle des conducteurs chargés qui peuvent se trouver, à l'état de corps isolés, dans le milieu diélectrique qui baigne les conducteurs. La répartition des lignes de force du champ électrique ne dépend donc pas exclusivement de la distribution des courants.

A l'intérieur des corps conducteurs, on parvient à définir un vecteur auquel nous pourrons donner le nom de *vecteur courant*, et qui est en réalité un vecteur représentant la densité de l'intensité du courant. Ce vecteur dépend des configurations et de la nature des conducteurs, de la position et de la grandeur des forces électromotrices des piles. Si sa répartition vient à être modifiée, le champ électrique extérieur se modifie d'une façon corrélative; mais inversement, si dans le champ extérieur on modifie la position, la configuration ou la charge des corps conducteurs chargés à l'état statique, ces diverses modifications, qui changent du tout au tout la distribution des lignes de force du champ extérieur, sont sans aucune influence sur la distribution des lignes de courant.

Un autre fait remarquable, c'est que le vecteur intensité de champ à l'extérieur des conducteurs, aussi bien que le vecteur intensité de courant à l'intérieur des conducteurs parcourus par des courants, dérivent d'un potentiel, et ce fait est d'autant plus remarquable que, dans le cas présent, le système n'est pas un système conservatif.

Digitized by Google

L'étude du champ des courants ou électrocinétique amène à envisager, en effet, d'autres formes d'énergie que celle qui a été envisagée en électrostatique. En électrostatique, on mesurait les travaux à accomplir pour effectuer le déplacement des corps chargés, et l'on considérait comme leur équivalent une certaine quantité d'énergie potentielle répartie dans le milieu diélectrique.

En électrocinétique, l'expérience met en évidence de nouvelles modifications, soit dans les sources de courant, soit dans les conducteurs eux-mêmes, modifications auxquelles correspondent des variations d'énergie.

A l'intérieur des conducteurs, on constate que, là où l'intensité du courant n'est pas nulle, il y a un dégagement de chaleur; cette dissipation locale d'énergie sous forme de chaleur s'effectue conformément à la loi de Joule.

Elle doit trouver son équivalent dans une diminution d'énergie de quelque autre partie du système.

Si le courant est produit par la décharge du condensateur, la chaleur de Joule représente la diminution de l'énergie électrostatique emmagasinée dans le diélectrique du condensateur.

Si le courant est produit par une pile hydro-électrique, la chaleur de Joule sera empruntée à l'énergie chimique et à la chaleur du milieu ambiant.

Si le courant est produit par une pile thermo-électrique, la chaleur de Joule sera empruntée exclusivement au milieu ambiant. Elle sera égale à la différence entre la quantité de chaleur, absorbée à la soudure chaude, et la quantité de chaleur, dégagée à la soudure froide, si l'on suppose négligeable le phénomène de Thomson.

Si le courant est produit, comme dans les machines dynamo-électriques, par le déplacement de conducteurs dans un champ magnétique, ou comme dans un transformateur par la variation d'un champ magnétique, la chaleur de Joule sera empruntée d'une façon indirecte au travail mécanique par l'intermédiaire de l'énergie magnétique, reconstituée par ledit travail mécanique d'une façon instantanée ou périodique, suivant le cas.

Nous verrons que l'ensemble des phénomènes électromagnétiques conduit à une conception très simple du courant électrique, selon laquelle il consisterait purement et simplement en un déplacement de charges électriques. La mesure d'un courant comporterait alors

Digitized by Google

deux mesures, savoir une mesure de quantité d'électricité et une mesure de vitesse. Et effectivement on mesure ainsi le courant de déperdition d'un conducteur mis à la terre par un fil mauvais conducteur. Gaugain a vérifié, au moyen de l'électroscope et en mesurant des durées, les lois d'Ohm appliquées à la décharge d'un condensateur mis à la terre par des fils de coton de différentes longueurs, mis bout à bout ou en parallèle.

Une intensité de courant peut aussi être mesurée par le voltamètre, conformément aux idées de Faraday.

Enfin, on peut également se servir du galvanomètre, et la mesure galvanométrique revient à la mesure d'une quantité d'électricité et d'une vitesse, dès qu'on admet comme acquis qu'une charge électrique en mouvement engendre un champ magnétique proportionnel à sa grandeur et à sa vitesse.

Dans l'électrocinétique, cependant, nous ne nous servirons que d'un seul instrument, l'électromètre, lequel sert à mesurer des différences de potentiel, et nous traiterons à part la question de savoir comment on peut faire concorder la notion de courant obtenue par cette voie avec les idées qu'on peut s'en faire en l'abordant d'une autre façon.

L'étude du champ du courant au moyen de l'électromètre permet de définir l'intensité du courant au moyen d'une intensité déterminée, prise arbitrairement pour unité. La mesure absolue est intimement liée à la question du choix des unités.

Champ électrostatique des courants. — Distribution de l'intensité du champ électrique au sein du milieu diélectrique dans le cas où des corps conducteurs chargés et isolés sont placés en présence de conducteurs parcourus par des courants permanents.

L'étude du milieu diélectrique montre que le milieu à l'état neutre ne s'électrise pas, donc $\rho = 0$; l'étude des conducteurs chargés et isolés montre que l'intensité du champ y aboutit normalement, ce qui conduit au point de vue de l'application de la formule de Vaschy à supposer $\tau = 0$ et à admettre l'existence de certaines masses σ. Enfin, on constate également l'existence d'un potentiel, donc $\mu = 0$. Il reste à examiner la surface des conducteurs parcourus par des courants permanents. Ici l'intensité du champ n'aboutit plus normalement au conducteur. On a donc des masses σ et des masses τ. Je

Digitized by Google

dis que *le flux du vecteur* τ *à travers un contour fermé quelconque tracé à la surface du conducteur parcouru par un courant permanent est nul.*

Soient, en effet,

$$4\pi\tau_x = n\,Y - m\,Z,$$
$$4\pi\tau_y = l\,Z - n\,X,$$
$$4\pi\tau_z = m\,X - l\,Y,$$

les composantes du vecteur $4\pi\tau$, lmn étant les cosinus directeurs de la normale à la surface du conducteur dirigée vers le diélectrique. Soient δx, δy, δz les composantes d'un élément de chemin δs sur la surface du conducteur; on aura

$$l\,\delta x + m\,\delta y + n\,\delta z = 0.$$

Les cosinus directeurs de la droite qui est tangente à la surface du conducteur et normale à l'élément de chemin δs, étant désignés par $l_1 m_1 n_1$, la projection du vecteur τ sur cette direction sera

$$l_1\tau_x + m_1\tau_y + n_1\tau_z,$$

et le flux à travers une courbe fermée dont δs est l'élément, tracée sur la surface du conducteur, sera

$$-\frac{1}{4\pi}\int \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l & m & n \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \delta s,$$

mais les mineurs $l_1 m - l m_1$, etc. sont proportionnels à δx, δy, δz, puisque δs est normal à la fois aux deux directions (lmn) et $(l_1 m_1 n_1)$; l'intégrale précédente peut s'écrire, à un facteur constant près :

$$\int (X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z);$$

or, l'étude du champ a prouvé que le vecteur XYZ dérive d'un potentiel, donc l'intégrale précédente prise le long d'un chemin fermé est bien nulle; le flux du vecteur τ à travers un circuit fermé est donc nul et, par suite, le vecteur τ se comporte comme le flux d'un fluide incompressible.

Dans la théorie des actions à distance, il n'y avait aucun doute que le champ ne dérivât d'un potentiel. Si, par exemple, on relie une

Digitized by Google

sphère par un fil fin conducteur isolé à un point d'un circuit parcouru par un courant permanent, on constate que la sphère prend une charge comme si on la lui avait communiquée au moyen de l'électrophore, qu'il en résulte un champ électrostatique rayonnant, dont l'intensité, mesurée en divers points, est variable d'un point à un autre en raison inverse du carré de la distance et que, par suite, dans le champ on a un potentiel.

Cela est exact, en ce qui concerne l'action des conducteurs qui ne sont pas sur le trajet du courant; cela cesse de l'être pour les conducteurs parcourus par le courant, car il faut alors tenir compte des masses vectorielles τ.

Cependant nous avons déjà eu l'occasion de démontrer l'équivalence des masses vectorielles et des masses scalaires pour le volume extérieur à ces masses; ce principe, connu sous le nom de principe de l'*équivalence* des courants et des aimants, quand il s'agit de l'électromagnétisme, doit trouver ici aussi son application et sous les mêmes réserves. Nous allons insister sur ce point : si l'on enferme dans une boîte un aimant, on constate un champ magnétique à l'extérieur de cette boîte; ce champ magnétique dérive d'un potentiel. On peut enlever l'aimant et le remplacer par une pile et un circuit métallique et régler l'intensité de la pile, la configuration du circuit et la résistance du fil, de façon à reproduire à l'extérieur de la boîte le champ magnétique préexistant. Tant que les expériences se bornent à l'exploration du champ à l'extérieur de la boîte, l'équivalence est parfaite. Mais si l'on considère un chemin qui traverse la boîte et passe dans le circuit métallique de façon à l'entourer une fois par exemple, le travail de la force magnétique le long de ce chemin fermé ne sera pas nul; bien plus, il mesurera le flux de courant embrassé. Si l'on considérait ce même chemin, l'aimant étant en place au lieu du circuit, on devrait imaginer qu'on a pratiqué dans la substance de l'aimant tout le long de ce chemin un canal infiniment délié, ce qui ne changerait qu'infiniment peu le champ magnétique, et le travail de la force magnétique, quand on reviendrait au point de départ, serait identiquement nul. On exprime ce fait en disant que, en dehors des courants, il y a un potentiel magnétique, mais que ce potentiel n'est pas uniforme.

Revenons maintenant au cas de l'électrocinétique. Si nous imaginons une surface Σ enveloppant complètement le circuit considéré et

Digitized by Google

simplement connexe, le champ électrostatique extérieur à Σ dérive d'un potentiel uniforme. S'il y a plusieurs circuits, on pourra le plus souvent supposer chacun d'eux enveloppé par une surface particulière Σ; le potentiel uniforme existera à l'extérieur de ces diverses surfaces, malgré l'existence des masses vectorielles réparties sur la surface extérieure des conducteurs parcourus par des courants; cela résulte évidemment, *mutatis mutandis*, des propriétés qui viennent d'être rappelées concernant les courants et les aimants.

Revenons maintenant sur la propriété $\mu = 0$. Si l'on a affaire à des courants permanents, le champ magnétique dû à ces courants est constant d'un moment à l'autre; sa variation instantanée est donc nulle à chaque instant. Par suite, si dans le milieu diélectrique nous n'avons pas d'autre champ magnétique que celui qui peut être dû à des aimants permanents et fixes et à des courants constants et immobiles, engendrés par des piles thermo-électriques ou hydro-électriques, il n'y aura pas de variation instantanée du vecteur intensité du champ magnétique; et c'est dans ces conditions que l'exploration du champ donne $\mu = 0$. Ce n'est donc, en somme, que si le champ électrostatique est le siège de phénomènes d'induction que la propriété d'existence du potentiel ($\mu = 0$) peut ne pas subsister.

Considérons en particulier le cas d'un circuit métallique fermé sur lui-même et soumis à des effets d'induction électromagnétique. Nous savons que ce circuit va être le siège de courants d'induction; sa surface ne sera pas équipotentielle; il y aura une composante tangentielle du vecteur électrique et, par suite, si nous envisageons exclusivement le milieu diélectrique, nous devrons, pour calculer l'intensité du champ électrique par la formule de Vaschy, introduire non seulement les quantités μ qui représentent la variation instantanée de l'induction magnétique, mais encore les quantités vectorielles τ à la surface du circuit métallique envisagé. Cependant, l'ensemble de ces quantités vectorielles formera une sorte de solénoïde autour du circuit métallique qui en sera le noyau. Il pourra arriver que la puissance de ce solénoïde fermé sur lui-même soit constante en tous les points. En ce cas, l'action des masses τ sur un point extérieur est nul et, par suite, le champ électrique ne dépendra que des charges électrostatiques du milieu et de μ.

C'est par exemple ce qui arriverait si l'on faisait passer un courant $i = i_1 t + i_0$ dans un solénoïde infiniment délié placé le long de

Digitized by Google

l'axe des z en présence d'un tore métallique, dont la surface serait la surface engendrée par la rotation d'une circonférence méridienne donnée autour de ce même axe des z.

Ce qui précède suffit pour montrer clairement qu'on ne peut démontrer *a priori* l'existence d'un potentiel; c'est l'expérience seule qui nous apprend qu'il y en a un, tant que des phénomènes d'induction ne sont pas en jeu.

Distribution électrostatique sur un câble. — Nous allons appliquer ces principes au cas suivant :

1° Une enveloppe conductrice et même parfaitement conductrice s'étend de tous côtés à l'infini et est limitée par la surface cylindrique

$$y^2 + z^2 = R_2^2;$$

2° A l'intérieur de cette enveloppe et coaxialement avec elle se trouve un fil cylindrique métallique homogène parcouru par un courant constant. La section droite de ce fil a pour équation

$$y^2 + z^2 = R_1^2;$$

3° Nous admettons comme un résultat d'expérience que le long du fil parcouru par le courant il y a dans le sens de l'axe des x une composante de l'intensité du champ qui est constante, de sorte qu'à la surface du conducteur le potentiel est donné par la formule

$$V = -hx,$$

en prenant arbitrairement pour potentiel de référence celui de la circonférence placée dans le plan des yz.

Nous savons que nous devrons, pour l'application du théorème de Vaschy, introduire des masses τ formant un solénoïde autour du fil conducteur intérieur comme noyau. Au point de vue de l'espace compris entre le fil conducteur et l'enveloppe extérieure, ce solénoïde agit comme des masses scalaires qui seraient uniformément réparties sur ses bases. Or, ces bases sont reculées à l'infini. Il en résulte que la partie du potentiel qui est due au solénoïde peut être considérée comme une constante ou même comme nulle.

Le long du conducteur central parcouru par le courant, le potentiel varie suivant la loi $V = -hx$; il est donc assez naturel de supposer, sauf à vérifier ensuite l'exactitude du résultat, que la densité

Digitized by Google

de la charge, à la distance x du plan des yz, est proportionnelle à x et que cette charge induit sur le cylindre-enveloppe, gardé au potentiel zéro, une charge égale et de signe contraire. Dans ces conditions, j'appelle $\frac{ax}{R_1}$ la densité de la charge sur (R_1); $-\frac{ax}{R_2}$ la densité de la charge sur (R_2); les quantités d'électricité réparties sur deux couronnes annulaires, en regard l'une de l'autre, d'épaisseur dx, sont bien alors égales et de signes contraires. Le facteur a est une quantité à déterminer, en fonction de h. Calculons donc les potentiels v' et v'' dus aux cylindres R_1 et R_2. Plaçons-nous en un point $P(\alpha\beta\gamma)$ entre les deux cylindres. Calculons v'. Soit $M(x, y, z)$ un point du cylindre (R_1), soit d la distance MP; la densité en M est $\frac{ax}{R_1}$; l'élément de surface est $dx\,ds$, en appelant ds l'élément de circonférence de section droite.

On a

$$v' = v_1 + v_2$$

en posant

$$v' = \int\int \frac{a\,x}{R_1 d}\,dx\,ds, \qquad v_1 = \int\int \frac{a(x-\alpha)}{R_1 d}\,dx\,ds, \qquad v_2 = \alpha \int\int \frac{a}{R_1 d}\,dx\,ds.$$

Mais on a

$$\frac{x-\alpha}{d} = \frac{\partial d}{\partial x},$$

d'où

$$v_1 = 2\pi a(d_2 - d_1).$$

On a aussi

$$v_2 = \alpha \frac{a}{R_1} \int ds \int \frac{dx}{d} = \alpha \frac{a}{R_1} \int ds \left(\int_{\alpha}^{d_1} \frac{dx}{d} + \int_{\alpha}^{d_2} \frac{dx}{d} \right),$$

les extrémités du filet qui a pour base dx se terminant aux cotes

$$x = \alpha + d_1 \qquad \text{et} \qquad x = \alpha - d_2,$$

d_1 et d_2 devant être considérés comme infiniment grands.

On a d'ailleurs

$$d^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2,$$

et si je pose

$$d'^2 = (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2,$$

il vient

$$d^2 = (x-\alpha)^2 + d'^2,$$

et, pour la partie du filet qui s'étend à droite de P du côté des x posi-

Digitized by Google

tifs jusqu'à la distance d_1,

$$\int_{\alpha}^{d_1} \frac{dx}{d} = \int_{\alpha}^{d_1} \frac{d(x-\alpha)}{\sqrt{(x-\alpha)^2+d'^2}} = \log\left[x-\alpha+\sqrt{(x-\alpha)^2+d'^2}\right]_{\alpha}^{d_1}.$$

Si d_1 est infiniment grand, cela se réduit sensiblement à

$$\log 2\,d_1 - \log d'.$$

On aurait de même, pour le filet qui s'étend à gauche de P du côté des x négatifs jusqu'à la distance d_2,

$$\int_{\alpha}^{d_2} \frac{dx}{d} = \log 2\,d_2 - \log d',$$

et, par suite, la somme devient

$$\log 4\,d_1 d_2 - 2\log d'.$$

D'où, pour l'intégrale v_2,

$$v_2 = \alpha \frac{a}{R_1} \int ds\,(\log 4\,d_1 d_2 - 2\log d')$$

ou, d'après une propriété connue du potentiel logarithmique,

$$v_2 = \alpha a\, 2\pi \log 4\,d_1 d_2 - 2\alpha a\, 2\pi \log r,$$

en posant

$$r^2 = y^2 + z^2.$$

On a donc, en définitive, pour le cylindre (R_1),

$$v = 2\pi a(d_2 - d_1) + 2\pi a\alpha \log 4\,d_1 d_2 - 4\pi a\alpha \log r.$$

On traiterait de même le cylindre (R_2) en remarquant qu'au lieu d'avoir

$$\int ds \log d' = 2\pi R_1 \log r,$$

on a, cette fois, toujours d'après la théorie du potentiel logarithmique,

$$\int ds \log d' = 2\pi R_2 \log R_2;$$

le potentiel v', dû aux masses de l'enveloppe, est alors

$$v' = -2\pi a(d_2 - d_1) - 2\pi a\alpha \log 4\,d_1 d_2 + 4\pi a\alpha \log R_2.$$

Digitized by Google

Par suite, le potentiel, dû à l'ensemble des masses scalaires réparties sur les deux cylindres (R_1) et (R_2), est

$$v = v' + v'' = -4\pi a\alpha \log \frac{r}{R_2}.$$

Ce potentiel résout bien le problème; en effet, la surface $r = R_2$ est bien au potentiel o, et, sur la surface $r = R_1$, on aura bien

$$v = -h\alpha,$$

pourvu qu'on pose, et ceci déterminera a en fonction de h,

$$a = \frac{1}{4\pi} \frac{h}{\log \frac{R_1}{R_2}}.$$

Toutes les conditions sont donc bien satisfaites.

La solution

$$v = -h \frac{\log r - \log R_2}{\log R_1 - \log R_2} \alpha$$

a été donnée par Vaschy.

Il résulte de la façon même dont nous l'avons obtenue que la capacité par unité de longueur est la même que si le courant ne passait pas.

Définition du vecteur intensité du champ électrique à l'intérieur d'un conducteur parcouru par un courant permanent. — Nous admettons comme un fait expérimental que l'intensité du champ électrique dérive d'un potentiel dans le milieu diélectrique.

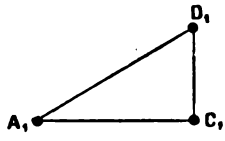
Prenons maintenant un électromètre, c'est-à-dire un appareil qui permette de mesurer la différence de potentiel entre deux conducteurs. Pour mesurer cette différence de potentiel, il suffit de lire la déviation de l'index, lorsqu'on touche simultanément le premier conducteur avec l'extrémité A de l'un des fils de secours et le second conducteur avec l'extrémité B de l'autre fil de secours. Ces fils sont revêtus d'une enveloppe isolante et dénudés à leurs extrémités seulement. Opérons de même, et touchons A_1 et B_1 d'un conducteur parcouru par un courant permanent; ces deux points tiennent la place des deux conducteurs électrisés isolés de tout à l'heure; nous constatons que lorsque A vient en contact avec A_1 et B en contact avec B_1, l'électromètre dévie. On remarquera tout d'abord,

Digitized by Google

comme il est facile de s'en convaincre au moyen d'un second électromètre, que tous les points d'un même fil de secours demeurent à un même potentiel. Par suite, la différence de potentiel mesurée par l'électromètre est égale au travail de l'intensité du champ électrique le long d'un chemin quelconque tracé dans le milieu isolant et allant de A_1 en B_1. L'indication de l'électromètre demeure constante, quelle que soit la longueur de l'un ou l'autre fil de secours, quelle que soit sa section pourvu qu'elle soit assez petite pour que son introduction dans la masse à explorer ne trouble pas l'état du courant, quel que soit le parcours suivi par ces fils, etc. En un mot, cette différence de potentiel est caractéristique des points A_1 et B_1, étant donné l'état du courant.

L'expérience montre en outre qu'aux environs du point A_1 supposé fixe, il y a une direction, telle que si l'on se dirige vers un autre point quelconque infiniment voisin de A_1 dans un plan perpendiculaire à cette direction, le travail de l'intensité du champ est nul. Supposons alors (*fig.* 30) que A_1C_1 soit dirigé suivant cette direction privilégiée, que C_1D_1 soit perpendiculaire à A_1C_1, que ces points C_1 et D_1 soient infiniment voisins du point A_1; si l'on appelle H′ la

Fig. 30.



composante du champ électrostatique suivant A_1D_1, H la composante du champ électrostatique suivant A_1C_1, la composante du champ électrostatique suivant C_1D_1 sera nulle et en appliquant au parcours $A_1C_1D_1$ fermé la loi de l'existence d'un potentiel, il viendra

$$H'.A_1D_1 = H.A_1C_1 \qquad \text{ou} \qquad H' = H\cos\alpha,$$

en appelant α l'angle de A_1D_1 avec A_1C_1. Dans ce raisonnement, on doit supposer tracés, dans la substance du milieu qui est parcouru par des courants permanents, des canaux infiniment déliés qui entourent les lignes A_1D_1 et A_1C_1. La distribution du courant permanent ne serait troublée qu'infiniment peu par la présence de ces canaux.

Digitized by Google

Ce vecteur H est l'intensité du champ électrique au point A_1.

Des expériences de ce genre ont été faites soit à la surface de plaques métalliques, soit dans la masse de conducteurs liquides, comme le sont, par exemple, des dissolutions de sulfate de cuivre ou de zinc.

Le long d'un contour fermé quelconque, nous avons

$$\int H' \, ds = 0.$$

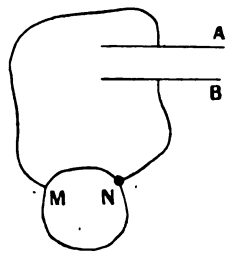
Nous aurons donc également, en remplaçant H′ par sa valeur,

$$\int H \cos\alpha \, ds = 0.$$

Ce qui montre que H dérive d'un potentiel; ce potentiel doit d'ailleurs, à la surface de la masse conductrice, se raccorder avec le potentiel dans le milieu diélectrique, car la composante tangentielle de H est égale à la composante tangentielle de h (H se rapportant au conducteur, h au diélectrique). Pour arriver maintenant à la conception de l'intensité du courant et à la notion de résistance, il convient de s'adresser aux circuits linéaires. Les résultats s'appliqueront aussitôt aux conducteurs homogènes isotropes.

Emploi de l'électromètre pour mesurer une différence de potentiel. — 1° L'électromètre se compose de deux plateaux métalliques A, B

Fig. 31.



(*fig.* 31), parallèles, entre lesquels on peut mesurer le champ électrique.

Soient h, l'intensité du champ, comptée positivement suivant la normale commune dans le sens AB;

Digitized by Google

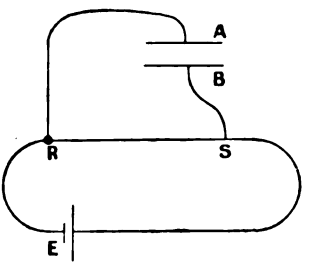
d, la distance des deux plateaux;
$V_A - V_B$, leur différence de potentiel.
On a $V_A - V_B = hd$.
La valeur de h peut se déduire en particulier de l'attraction exercée par B sur A.

2° Si l'on réunit A et B par des fils conducteurs isolés respectivement à deux points M, N d'un conducteur en équilibre électrostatique, on aura $V_A = V_B$ et $h = 0$.

3° Si l'on réunit A et B par des fils conducteurs isolés respectivement à deux conducteurs isolés P, Q, le plateau A se mettra au potentiel V_P de P et le plateau B se mettra au potentiel V_Q de Q; donc, l'observation de h dans l'électromètre donnera $V_P - V_Q$.

4° Si l'on constitue un circuit métallique rattaché aux pôles d'une pile E (*fig.* 32) et qu'on relie A et B respectivement aux points R

Fig. 32.



et S de ce circuit, on constatera :

1° Que les divers points du fil RA sont au même potentiel;

2° Que les divers points du fil SB sont également au même potentiel;

3° Que l'électromètre donne une indication permanente.

On en conclut que les points R et S ne sont pas au même potentiel et que la différence de potentiel $V_R - V_S$, indiquée par l'électromètre est égal à l'intégrale $\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ prise en particulier en allant dans le diélectrique de R à S, en suivant la surface du conducteur.

Digitized by Google

COURANTS LINÉAIRES.

Loi d'Ohm. — Considérons certains fils conducteurs isolés, $F_1, F_2, F_3, \ldots$, et formons avec tous ou quelques-uns d'entre eux mis bout à bout en contact, un circuit C_1, rattaché aux deux pôles d'une pile E_1; mesurons les différences de potentiel $V_1 - V'_1$, $V_2 - V'_2$, $V_3 - V'_3$, ... aux extrémités des fils F_1, F_2, F_3 respectivement. Formons de même un autre circuit C_2 rattaché à une autre pile E_2, où ces fils entreront tous ou partiellement dans un ordre quelconque, et mesurons de même les différences de potentiel $U_1 - U'_1$, $U_2 - U'_2$, $U_3 - U'_3$, ... aux extrémités des fils F_1, F_2, F_3 respectivement. Formons un troisième circuit C_3 dans des conditions analogues avec une pile E_3, et soient $W_1 - W'_1$, $W_2 - W'_2$, $W_3 - W'_3$, les différences de potentiel observées correspondantes.

Nous pourrons former un tableau à double entrée avec toutes les valeurs observées des différences de potentiel.

	F_1	F_2	F_3	
C_1	$V_1 - V'_1$	$V_2 - V'_2$	$V_3 - V'_3$	i_1
C_2	$U_1 - U'_1$	$U_2 - U'_2$	$U_3 - U'_3$	i_2
C_3	$W_1 - W'_1$	$W_2 - W'_2$	$W_3 - W'_3$	i_3
	R_1	R_2	R_3	

On remarquera que tous les nombres d'une ligne sont proportionnels aux nombres correspondants de la ligne suivante. Soient R_1, R_2, R_3 des nombres choisis proportionnels à ces valeurs.

Comparons de même les nombres d'une colonne à ceux de la colonne voisine et nous trouvons que ces nombres sont proportionnels l'un à l'autre. Soient i_1, i_2, i_3 des nombres choisis proportionnels à ces valeurs.

Les nombres R_1, R_2, R_3 demeurant les mêmes, quel que soit le circuit considéré, sont caractéristiques des fils F_1, F_2, F_3, nous les appellerons les *résistances*. Les nombres i_1, i_2, i_3 sont caractéristiques du circuit particulier envisagé; nous les appellerons les *intensités du courant*. Il est clair qu'en choisissant convenablement les nombres arbitraires R_1 et i_1, on pourra écrire

$$V_1 - V'_1 = R_1 i_1.$$

Digitized by Google

Dès lors, on aura d'une façon générale

$$W_n - W'_n = R_n i_n.$$

Cette analyse permet donc de définir : d'une part, les résistances; d'autre part, les intensités. Les formules que nous venons d'obtenir sont l'expression de la loi d'Ohm.

Définition de la force électromotrice. — Supposons que le circuit C_1 soit fermé sur une pile de résistance intérieure négligeable, pile thermo-électrique ou accumulateur; soient F_1, F_2, F_3 les fils constitutifs du circuit dans l'ordre où on les rencontre en partant d'un pôle de la pile pour aller jusqu'à l'autre. On aura

$$\frac{V_1 - V'_1}{R_1} = \frac{V_2 - V'_2}{R_2} = \frac{V_3 - V'_3}{R_3} = i_1;$$

mais $V'_1 = V_2$, $V'_2 = V_3$, donc il vient

$$\frac{V_1 - V'_3}{R_1 + R_2 + R_3} = i_1,$$

et cette différence de potentiel $V_1 - V'_3$ est évidemment celle qu'on observe en reliant à l'électromètre AB les deux pôles de la pile.

Si, au lieu du circuit C_1, on avait considéré d'autres circuits C'_1, C''_1, on aurait trouvé que la différence de potentiel des deux pôles de la pile reste invariable et qu'elle est indépendante du circuit considéré. Elle définit donc quelque chose qui ne dépend que de la pile. Ce sera, par définition, sa force électromotrice E_1. Ainsi, la force électromotrice d'une pile n'est autre que $\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$, l'intégrale étant prise en suivant dans le diélectrique un chemin qui va d'un pôle de la pile à un autre pôle, soit en cheminant le long des conducteurs du circuit, soit en suivant un autre tracé quelconque. Quand on suit les conducteurs du circuit, on a $E_1 = \Sigma R i$.

Loi de Joule. — L'analyse qui vient d'être faite en observant les indications du potentiel données par l'électromètre, nous pourrions la faire en nous servant du calorimètre. Les fils F_1, F_2, F_3 auraient été plongés dans un calorimètre et l'on aurait mesuré la quantité de chaleur dégagée par chacun de ces conducteurs pendant l'unité de

Digitized by Google

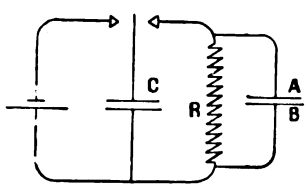
temps. On aurait pu alors tracer de même un Tableau à double entrée, et l'on aurait trouvé que les quantités de chaleur dégagées par chaque fil dans l'unité de temps sont pour un même circuit proportionnelles à R_1, R_2, R_3 et pour un même fil, proportionnelles suivant le circuit, à i_1^2, i_2^2, i_3^2.

	F_1	F_2	F_3	
C_1	Q_1	Q_2	Q_3	i_1^2
C_2	Q'_1	Q'_2	Q'_3	i_2^2
C_3	Q''_1	Q''_2	Q''_3	i_3^2
	R_1	R_2	R_3	

Par un choix convenable des unités choisies pour mesurer les résistances et les intensités, on peut écrire d'une façon générale $Q = Ri^2$: c'est la loi de Joule.

Décharge du condensateur. — Considérons un condensateur plan (*fig.* 33); chargeons-le avec une pile; son énergie électrostatique est

Fig. 33.



$\frac{1}{2} C(V - V')^2$, en appelant C sa capacité, V et V′ les potentiels de ses armatures.

Déchargeons-le sur une résistance R; l'électromètre AB, dont la capacité est supposée négligeable, permet de suivre la variation V—V′ du potentiel des deux armatures du condensateur C. A chaque instant on a

$$V - V' = Ri.$$

Or, d'après la loi de Joule, l'énergie dissipée sous forme de chaleur dans le circuit R est égale à Ri^2, par unité de temps, ou à $(V - V')i$.

Si l'énergie magnétique est négligeable, on admettra que le dégagement de chaleur mesure la perte de l'énergie électrostatique; on

Digitized by Google

aura donc

$$(V - V')i = -\frac{d}{dt}\frac{1}{2}C(V - V')^2;$$

d'où

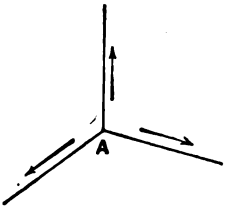
$$i\,dt = -dC(V - V').$$

Donc $i\,dt$ est égal à la diminution de la charge du condensateur.

Par conséquent, i représente la quantité d'électricité qui a passé pendant la décharge d'une armature à l'autre. On est obligé d'admettre que c'est par le fil.

Loi de Kirchhoff. — Considérons un réseau de conducteurs linéaires (*fig.* 34), soit A un nœud de ce réseau. Supposons que le régime

Fig. 34.



permanent soit obtenu et qu'il n'y ait pas d'accumulation d'électricité en A; alors, si les intensités des courants représentent les quantités d'électricité qui circulent dans les conducteurs, on aura évidemment, en comptant positivement les intensités dans le sens qui suit les fils à partir de A comme origine,

$$\Sigma i = 0,$$

le signe Σ s'étendant à tous les conducteurs partant de A.

Il est d'ailleurs facile, au moyen de l'électromètre, de vérifier cette loi. Cette loi est une conséquence du principe de la conservation de l'électricité.

Nature discontinue de l'électricité. — La loi $\Sigma i = 0$, appliquée en un point d'un conducteur à trois dimensions, signifie qu'il n'y a pas d'accumulation d'électricité en un point intérieur d'une masse métallique parcourue par un courant permanent.

Mais alors, si, dans chaque élément de volume, des quantités

Digitized by Google

d'électricité égales et contraires se croisent, avec des vitesses d'ailleurs inconnues, égales ou inégales, nous ne pouvons concevoir ces deux courants contraires comme ceux de deux fluides continus, mais nous sommes forcément amenés à les considérer comme constitués par des grains en mouvement. Ces grains seront chargés les uns positivement, les autres négativement. Dans tout volume très petit, il y aura une quantité totale d'électricité égale à zéro. Ces grains seront maintenus à distance les uns des autres, malgré leur attraction mutuelle, par leur énergie cinétique.

Si une telle conception est admissible, il faut pouvoir révéler, dans le courant, ces charges discrètes. Pour savoir ce qui se passe dans le fil, il faut y établir une coupure; si l'on opère dans le vide de Crookes, il se produit à la coupure des rayons cathodiques d'une part et des rayons canaux d'autre part. Or, les uns et les autres sont déviés, en sens contraire, par un champ électrostatique transversal, et l'on a pu recueillir, dans un cylindre de Faraday placé dans l'ampoule, les quantités d'électricité négatives véhiculées par les rayons cathodiques.

Il est donc certain que le courant est bien dû à l'intérieur des conducteurs à un déplacement de grains électrisés. Et comme la matière du conducteur reste inaltérée, nous en conclurons qu'il s'agit, tout au moins principalement, d'électrons libres, simples points de concentration de la force électrique, dénués de masse matérielle et non liés, comme les ions d'un électrolyte, aux parties constitutives des molécules.

Chaleur dégagée dans les diélectriques. — Considérons un condensateur chargé d'une quantité Q d'électricité au potentiel V. Soit C sa capacité. Le travail des forces électriques donne, pour l'énergie électrostatique,

$$W = \frac{1}{2} QV.$$

Mais ce calcul de l'énergie n'est correct que s'il n'y a pas d'autre énergie en jeu : il faut qu'en particulier la température du condensateur ne varie pas. Or, la capacité d'un condensateur est variable avec la température, parce que la capacité inductive spécifique de l'isolant dépend de la température. Dans ces conditions, l'application des lois de la Thermodynamique montre que le milieu cède la quantité

Digitized by Google

de chaleur

$$P = \frac{1}{2} QV \frac{T}{C} \frac{dC}{dT},$$

pour maintenir la température constante, ce qui augmente d'autant l'énergie fournie au système.

Mais si nous admettons que la loi de Joule subsiste et qu'il se dégage dans le circuit extérieur la quantité de chaleur

$$J = R i^2$$

par unité de temps, et si, d'autre part, nous regardons le courant comme représentant la quantité d'électricité qui passe par unité de temps d'une armature à l'autre, de sorte qu'on puisse toujours écrire

$$i\,dt = dQ,$$

il résulte de ces hypothèses que J est égal à $\frac{1}{2}QV$, et que $\frac{1}{2}QV$ est la quantité d'énergie qui est disponible, pendant la décharge, dans le circuit extérieur sous forme de chaleur ou de travail.

Alors la quantité P est restituée sous forme de chaleur au sein du milieu diélectrique. On peut donc conserver à $\frac{1}{2}QV$ le nom d'*énergie électrique*, bien que ce ne soit par la quantité totale d'énergie emmagasinée, pendant la charge, par le condensateur.

Nous préférons donc maintenir la loi de Faraday $Q = i\,dt$ et abandonner le calcul de l'énergie emmagasinée, plutôt que de maintenir comme exacte l'expression de l'énergie, ce qui nous obligerait à modifier la relation entre i et Q. C'est que la formule $Q = i\,dt$ représente l'expression mathématique d'une loi dont le caractère de généralité et de simplicité est évident, puisqu'elle amène à une conception concrète du courant. Grâce à elle, on peut imaginer, en effet, que le courant consiste tout simplement dans le transport à l'intérieur des conducteurs des charges électriques. On peut se représenter ces charges comme des grains très petits supportant chacun un atome élémentaire d'électricité. C'est une vue qui s'est imposée, dès le début, à l'esprit des premiers physiciens et à laquelle nous ne saurions renoncer.

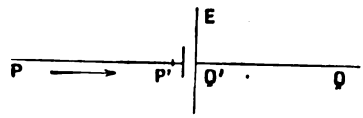
Théorie des réseaux linéaires de conducteurs. — 1° Nous savons que l'observation de la différence de potentiel constatée aux bornes

Digitized by Google

d'une pile au moyen de l'électromètre montre que, lorsqu'elle est en service, le voltage diminue d'une quantité proportionnelle à l'intensité. On doit donc tenir compte de la résistance intérieure des piles. Cette résistance sera, dans la suite, confondue avec la résistance totale de la branche où la pile est intercalée, dans la même désignation R.

2° Soit PQ (*fig.* 35) une portion quelconque d'un conducteur par-

Fig. 35.



couru par un courant, le conducteur pouvant faire partie d'un réseau plus ou moins complexe. Soient P′ et Q′ les pôles de la pile, ρ sa résistance intérieure, E la force électromotrice de la pile comptée positivement si elle tend à faire circuler un courant dans le sens PQ, V_P, $V_{P'}$, les potentiels en P et P′, V_Q, $V_{Q'}$ les potentiels en Q et Q′, i, l'intensité, comptée positivement de P vers Q. On aura, d'après la loi d'Ohm,

$$V_P - V_{P'} = R_{PP'} i,$$
$$V_{Q'} - V_Q = R_{QQ'} i,$$

et, d'après la définition de la force électromotrice,

$$V_{Q'} - V_{P'} = E - \rho i.$$

Or, on a identiquement

$$(V_P - V_{P'}) - (V_{Q'} - V_{P'}) + (V_{Q'} - V_Q) = V_P - V_Q;$$

d'où

$$V_P - V_Q = R_{PP'} i + R_{QQ'} i + \rho i - E$$

ou, en posant

$$R = R_{PP'} + R_{QQ'} + \rho,$$
$$V_P - V_Q = R i - E.$$

Réseau de conducteurs parcourus par un courant permanent. — Soient V_1, V_2, ..., V_n les potentiels aux nœuds P_1, P_2, ..., P_n d'un réseau de conducteurs linéaires; e_{12}, e_{13}, ..., e_{1n} les forces électromotrices intercalées dans les branches P_1P_2, P_1P_3, ..., P_1P_n; e_{21}, e_{23}, ..., e_{2n} les forces électromotrices intercalées dans les branches

Digitized by Google

P_2P_1, P_2P_3, ..., P_2P_n, etc., la force électromotrice e_{kl} intercalée dans la branche P_kP_l, il résulte immédiatement de cette convention que

$$e_{kl} = -e_{lk}.$$

Soient enfin, d'une façon générale, $i_{kl} = -i_{lk}$ le courant dans la branche P_kP_l et $r_{kl} = r_{lk}$ la résistance de cette branche.

On aura

$$(1)\quad \begin{cases} V_1 - V_2 = r_{12} i_{12} - e_{12}, \\ V_1 - V_3 = r_{13} i_{13} - e_{13}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ V_1 - V_n = r_{1n} i_{1n} - e_{1n}, \\ V_2 - V_3 = r_{23} i_{23} - e_{23}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ V_2 - V_n = r_{2n} i_{2n} - e_{2n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ V_{n-1} - V_n = r_{n-1,n} i_{n-1,n} - e_{n-1,n}. \end{cases}$$

En appliquant la loi de Kirchhoff aux différents nœuds du réseau, nous aurons aussi les équations

$$(2)\quad \begin{cases} i_{12} + i_{13} + \dots + i_{1n} = 0, \\ i_{21} + i_{23} + \dots + i_{2n} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ i_{n1} + i_{n2} + \dots + i_{n,n-1} = 0. \end{cases}$$

On peut considérer ces dernières équations (2) comme des équations de liaison pour les variables i. Cela posé, proposons-nous de mettre les équations (1) sous une forme symétrique, et à cet effet, posons

$$J = \Sigma r_{kl} i_{kl}^2,$$

chaleur Joule dégagée pendant l'unité de temps dans l'ensemble du circuit, et

$$W = \Sigma e_{kl} i_{kl}.$$

Donnons aux intensités des variations compatibles avec les liaisons exprimées par les équations (2). D'après les équations de Kirchhoff exprimant la conservation de l'électricité et appliquées aux nouvelles intensités $i_{12} + \delta i_{12}$, ..., on aura, en tenant compte de (2),

$$(3)\quad \begin{cases} \delta i_{12} + \delta i_{13} + \dots + \delta i_{1n} = 0, \\ \delta i_{21} + \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Digitized by Google

Multiplions les équations (1) respectivement par δi_{12}, δi_{13}, ..., δi_{1n}, δi_{23}, ..., δi_{2n}, ..., $\delta i_{n-1,n}$ et ajoutons membre à membre; les coefficients des V sont tous nuls, en vertu des équations (3) et il vient

$$\Sigma ri\,\delta i - \Sigma e\,\delta i = 0.$$

Or

$$\Sigma ri\,\delta i = \frac{1}{2}\delta J, \qquad \Sigma e\,\delta i = \delta W.$$

Donc

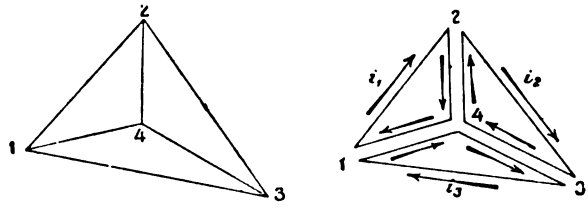
$$\frac{1}{2}\delta J - \delta W = 0.$$

Les équations de Kirchhoff relatives aux sommets permettent d'exprimer les intensités i dans les différentes branches en fonction de certaines d'entre elles prises pour variables indépendantes. En calculant δJ et δW en fonction des variations de ces variables indépendantes et en écrivant que les coefficients de ces variations sont nuls dans l'expression $\frac{1}{2}\delta J - \delta W$, on aura les équations mises évidemment sous forme symétrique, puisque J et W sont des fonctions quadratiques de ces variables.

Mais quel moyen commode avons-nous de faire l'élimination qui permet de ne considérer que les variables indépendantes? Pour cela, nous décomposerons le réseau en mailles et nous affecterons à chaque maille une intensité et un sens de circulation; le courant dans un côté aura pour véritable intensité la somme algébrique des intensités des mailles qu'il borde. Il y a autant de variables indépendantes que de mailles distinctes.

Par exemple, dans le cas du pont de Wheatstone (*fig.* 36), qui est

Fig. 36.



en réalité un quadrilatère complet 1, 2, 3, 4, nous aurons trois mailles, par exemple, 123, 243, 431, et nous choisirons pour variables indépendantes les intensités i_1, i_2, i_3 circulant dans les côtés 12, 23,

Digitized by Google

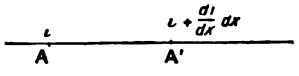
31 et nous aurons :

$$\begin{aligned} i_{12} &= i_1 \qquad i_{23} = i_2 \qquad i_{34} = i_2 - i_3 \\ i_{13} &= -i_2 \qquad i_{24} = i_1 - i_1 \\ i_{14} &= i_3 - i_1 \end{aligned}$$

Les six intensités sont ainsi exprimées en fonction de trois variables indépendantes choisies de façon que les trois équations de liaison indépendantes relatives aux sommets soient satisfaites d'elles-mêmes.

Application. -- Ligne affectée d'une perte uniforme. — Supposons que nous ayons affaire à une ligne imparfaitement isolée, la résistance d'isolement étant ρ' par unité de longueur (*fig.* 37).

Fig. 37.



Nous avons à rendre minimum l'expression

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathrm{J} - \mathrm{W} &= \frac{1}{2}\int\left[\rho\,dx\,i^2 + \frac{\rho'}{dx}\left(\frac{di}{dx}\,dx\right)^2\right] - (\mathrm{E}\,i)_0 \\ &= \frac{1}{2}\int\left[\rho\,i^2 + \rho'\left(\frac{di}{dx}\right)^2\right]dx - (\mathrm{E}\,i)_0. \end{aligned}$$

On aura

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,\delta\mathrm{J} &= \int\left(\rho i\,\delta i + \rho'\frac{di}{dx}\,\delta\frac{di}{dx}\right)dx \\ &= \int\left(\rho i - \rho'\frac{d^2 i}{dx^2}\right)dx\,\delta i - \left(\rho'\frac{di}{dx}\right)_0\delta i_0 + \left(\rho'\frac{di}{dx}\right)_n\delta i_n = \mathrm{E}\,\delta i_0. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \rho i - \rho'\frac{d^2 i}{dx^2} &= 0 \text{ en ligne courante} \\ -\rho'\left(\frac{di}{dx}\right)_0 &= \mathrm{E} \text{ à l'origine,} \\ \left(\frac{di}{dx}\right)_n &= 0 \text{ à l'extrémité mise à la terre.} \end{aligned}$$

Si l'extrémité, au lieu d'être à la terre, était isolée, on aurait pour le courant à l'extrémité $i_n = 0$ et $\delta i_n = 0$ et le terme intégré correspondant disparaîtrait.

Digitized by Google

On voit facilement que la solution de l'équation différentielle

$$\rho i - \rho' \frac{d^2 i}{dx^2} = 0$$

satisfaisant aux conditions aux limites précédentes est

$$i = \frac{E}{\sqrt{-\rho\rho'}} \frac{\cos(l-x)\sqrt{-\frac{\rho}{\rho'}}}{\sin l\sqrt{-\frac{\rho}{\rho'}}}$$

si la ligne est à la terre à l'extrémité, et

$$i = \frac{E}{\sqrt{-\rho\rho'}} \frac{\sin(l-x)\sqrt{-\frac{\rho}{\rho'}}}{\cos l\sqrt{-\frac{\rho}{\rho'}}}$$

si la ligne est isolée à l'extrémité.

Ces formules sont susceptibles de généralisation, au moyen de la méthode qui représente par des imaginaires les quantités qui varient suivant une loi sinusoïdale. En posant $E = Ae^{\omega t\sqrt{-1}}$ on serait amené, pour tenir compte de la self-induction, à poser

$$\rho = r + l\omega\sqrt{-1},$$

et, pour tenir compte de la capacité, à poser

$$\rho' = -\frac{\sqrt{-1}}{c\omega}.$$

DISTRIBUTION DU COURANT DANS UN CONDUCTEUR A TROIS DIMENSIONS.

Nous allons d'abord démontrer que la chaleur dégagée en vertu de la loi de Joule dans un réseau qui ne contient pas de forces électromotrices, mais dont les sommets reçoivent des intensités constantes, I est un minimum, lorque les intensités qui circulent dans les différentes branches sont données par la loi d'Ohm.

En effet, soient I le courant qui circule dans la branche de résistance R en vertu de la loi d'Ohm, et $I + I'$ le courant réel circulant

Digitized by Google

dans cette branche

$$J = \Sigma R(I + I')^2 = \Sigma RI(I + 2I') + \Sigma RI'^2 = \Sigma(V - V')(I + 2I') + \Sigma RI'^2,$$

$V - V'$ étant la différence de potentiel aux extrémités de la branche R.

Or, en vertu des équations de Kirchhoff, on a, au sommet 1,

$$\Sigma I = I_1,$$
$$\Sigma I' = 0.$$

Si donc V_1 est le potentiel du nœud 1, on a

$$\Sigma(V - V')(I + 2I') = \Sigma V_1 I_1;$$

d'où

$$J = \Sigma V_1 I_1 + \Sigma RI'^2.$$

Comme les quantités R sont toutes positives, J sera bien minimum lorsque toutes les quantités I' seront nulles, c'est-à-dire quand le courant satisfera à la loi d'Ohm. Ainsi, la loi d'Ohm se traduit par l'équation $\delta J = 0$.

Cette équation mise sous forme de variation se prête immédiatement à l'étude de la distribution du courant dans les conducteurs à trois dimensions en appliquant le calcul des variations.

1° *Application de la loi de Kirchhoff.* — Ainsi qu'on vient de le voir dans un des paragraphes précédents, lorsqu'on fait appel à l'expérience journalière des stations centrales et qu'on mesure, par exemple, avec un électromètre et un shunt, les diverses intensités d'un réseau, on trouve que l'intensité débitée par une machine est à chaque instant la somme des intensités reçues dans les divers circuits d'utilisation. Ce résultat signifie que les intensités se comporten comme le flux d'une matière incompressible. Si nous généralisons cette loi, et que nous la supposons applicable en un point quelconque d'un milieu conducteur, nous lui donnerons son expression mathématique, en écrivant la condition

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Dans cette équation, u, v, w sont les composantes du vecteur i, qui

Digitized by Google

représente la densité de courant. La répartition d'un vecteur qui obéit à cette loi est dite *solénoïdale*.

J'appelle *ligne de flux* une ligne définie par les équations

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}.$$

J'appelle *tube de flux* une surface engendrée par les diverses lignes de flux qui s'appuient sur un contour fermé.

La formule d'Ostrogradski, qui donne

$$\int_U \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) d\varpi = \int_S (l u + m v + n w)\, dS,$$

montre que le flux du vecteur i est constant à l'intérieur d'un tube de flux. Si le tube de flux est infiniment délié, il prend le nom de *filet*.

2° Cela posé, nous admettrons que le conducteur est le siège d'un dégagement de chaleur, par le fait du passage du courant, conformément à la loi de Joule, et que la quantité de chaleur dégagée par unité de temps a pour valeur $\frac{i^2}{c}\, d\varpi$, $d\varpi$ étant l'élément de volume considéré et c une constante spécifique caractéristique de la substance du conducteur.

En vertu de la propriété de minimum qui vient d'être démontrée, nous aurons, dans un conducteur à trois dimensions, à rendre minimum l'intégrale

$$\int \frac{1}{c}(u^2 + v^2 + w^2)\, d\varpi,$$

c'est-à-dire à satisfaire à l'équation

$$\delta \int \frac{1}{c}(u^2 + v^2 + w^2)\, d\varpi = 0,$$

en supposant que le vecteur u, v, w, satisfait à la condition de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

qui est la traduction de la loi de Kirchhoff.

Et en même temps nous supposons que, par certaines parties de

Digitized by Google

la surface S_1, S_2, ... limitant le volume considéré, entrent par unité de temps des quantités I_1, I_2, ..., de telle sorte qu'on ait

$$\int_{S_1} (lu + mv + nw)\, dS = I_1,$$
$$\int_{S_2} (lu + mv + nw)\, dS = I_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

et sur les parties de la surface par lesquelles n'entre pas de courant

$$\int_{S} (lu + mv + nw)\, dS = 0.$$

En vertu de la condition solénoïdale, la somme des quantités algébriques I_1, I_2, ... doit être nulle.

On peut, en reprenant la même démonstration que nous avons donnée dans le problème relatif à la distribution de l'intensité du champ électrique, introduire, d'après la méthode du calcul des variations, une fonction ψ, et l'on verrait, en suivant la même marche, qu'on a

$$u = -c\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

et deux autres équations analogues.

Ces équations sont des équations exprimant la loi d'Ohm dans un conducteur à trois dimensions. De plus, la fonction ψ introduite doit être constante sur chacune des surfaces S_1. Ainsi, si par une certaine surface entre un flux donné de courant qui reste invariable, il faut que cette surface soit une surface équipotentielle.

La condition $\delta J = 0$, dans les conditions qui ont été précisées, donne donc pour expressions de u, v, w les dérivées partielles d'une fonction $-c\psi$. Il en résulte qu'on a

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

propriété qui appartient justement au vecteur h, intensité du champ électrique. Nous allons montrer qu'en effet on a

$$h = -\frac{d\psi}{dn},$$

dn étant l'élément de filet.

Digitized by Google

Examinons, en effet, la répartition du vecteur i au point de vue de l'application du théorème de Vaschy, en portant notre attention sur les conditions suivantes :

1° La surface du conducteur sera une surface de flux;

2° Les surfaces de base seront maintenues à des potentiels constants ψ_1 et ψ_2 respectivement;

3° Le vecteur i a une distribution qui est à la fois solénoïdale et irrotationnelle.

Il ne peut y avoir deux solutions, car si ψ' et ψ'' étaient solutions. $\psi' - \psi''$ serait aussi solution; mais les valeurs de $\psi' - \psi''$ seraient nulles sur les bases. Dès lors, la formule

$$\int_U \psi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\varpi + \int_U \left(u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) d\varpi = \int_S \psi (lu + mv + nw)\, dS = 0$$

montrerait que $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ sont nuls. En effet, la première intégrale de volume est nulle en vertu de la condition solénoïdale; l'intégrale de surface est également nulle, soit parce que $lu + mv + nw = 0$, comme cela a lieu sur la surface latérale, soit parce que $\psi = 0$, comme cela a lieu sur les bases. Donc, la seconde intégrale de volume est nulle, mais son élément est égal à $-c \sum \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2$; donc il faut bien qu'on ait

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0.$$

Donc ψ' et ψ'' ne peuvent différer que par une constante, ce qui est sans effet sur la distribution.

Si donc on se donne le volume U, les deux potentiels sur les surfaces de base, le vecteur i est entièrement déterminé en tous les points.

Au lieu de se donner les potentiels des deux bases, on aurait pu se donner pour chaque élément de surface des bases le flux i; dans ces conditions, le vecteur i serait entièrement défini, en vertu de la formule de Vaschy, par les quantités $4\pi\tau = lu + mv + nw$, supposées données en chaque point des bases, on aurait, en effet,

$$\rho = 0, \qquad \mu = 0, \qquad \tau = 0$$

Digitized by Google

partout, et

$$\sigma = 0$$

sur la surface latérale.

Il en résulte que la distribution du flux se fait par filets indépendants; peu importe qu'ils soient ou non en contact métallique avec les filets voisins; on pourrait les supposer revêtus chacun d'une enveloppe isolante infiniment mince; le flux, le long de chaque filet, resterait le même; on aurait encore le même résultat si l'on courbait le filet comme un fil flexible et inextensible. Mais alors, considérons ces filets ainsi écartés les uns des autres; nous voyons que, le courant dans un tube de flux étant la somme des courants des filets composants, la conductibilité dans un circuit filiforme est proportionnelle à la section.

Et comme la résistance est proportionnelle à la longueur, on en conclut que la résistance R d'une portion, de longueur l, d'un circuit filiforme, de section constante s, est de la forme

$$R = \rho \frac{l}{s},$$

où ρ désigne une constante spécifique que nous appellerons la *résistivité*. Mais la loi d'Ohm appliquée à l'élément d'un filet, lequel peut être considéré comme un circuit filiforme, donne

$$RI = V_1 - V_2.$$

Et nous avons

$$\frac{I}{s} = i, \qquad \frac{V_1 - V_2}{l} = h, \qquad \text{d'où} \qquad i = \frac{1}{\rho} h.$$

Comparons cette formule aux équations

$$u = -c \frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad \dots,$$

qui donnent

$$i = -c \frac{d\psi}{dn},$$

nous voyons qu'en faisant $c = \frac{1}{\rho}$, il vient

$$h = -\frac{d\psi}{dn},$$

de sorte que ψ n'est pas autre chose que le potentiel électrostatique.

Remarque concernant l'influence de la section sur la résis-

Digitized by Google

tance. — Dans les traités élémentaires, on commence par démontrer les lois d'Ohm et de Kirchhoff; puis, considérant un système de circuits dérivés, on écrit

$$V_1 - V_2 = r_1 i_1 = r_2 i_2 = r_3 i_3,$$

d'où

$$\sum i = (V_1 - V_2) \sum \frac{1}{r}.$$

Soit donc

$$\sum i = I \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{1}{r} = \frac{1}{R},$$

on aura

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R}.$$

Ceci prouve que si l'on remplace l'ensemble des résistances par la résistance d'un fil unique dont la résistance serait R, le même courant I serait obtenu. Faisons donc toutes les résistances égales entre elles, en les constituant par des fils de même nature, de même longueur et de même section. On remarque que $\frac{1}{R}$ sera proportionnel à la somme des sections. *On en conclut* que le fil unique remplaçant tous les autres, s'il est de même nature et de même longueur, aura une section égale à la somme des sections. Cela pourtant n'est pas évident, car, tant que les fils sont séparés et isolés les uns des autres, aucun courant ne peut passer de l'un à l'autre; quand, au contraire, on les réunit en les mettant juxtaposés et en contact métallique les uns avec les autres pour former un conducteur plus gros, on supprime des liaisons. Les deux systèmes ne sont pas équivalents, et il n'est pas prouvé que R sera la résistance du fil unique. Nous avons pu, au contraire, tirer cette conclusion parce que nous nous sommes appuyés sur ce fait que la distribution dans chaque filet reste la même, que ce filet soit en contact métallique avec les voisins ou qu'il en soit isolé; mais cela exigeait démonstration, qui nous a été fournie par l'étude de la conduction dans un corps à trois dimensions.

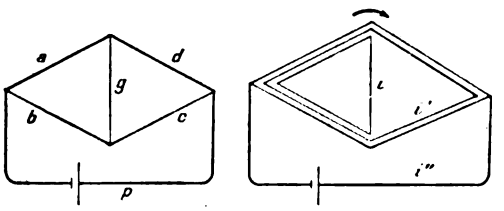
On pourrait, il est vrai, échapper à cette nécessité en remarquant que si l'on réunit, dans un réseau de conducteurs linéaires parcourus par des courants, deux points MM′ qui sont au même potentiel par une nouvelle branche de résistance r, il ne passe aucun courant dans cette branche, et qu'on peut faire à volonté $r = 0$ ou $r = 1$, sans modifier le régime dans les autres branches. On peut donc, sans

Digitized by Google

troubler ce régime, établir ou supprimer des *liaisons* de ce genre. Il faut remarquer que la présence de la branche r ne trouble pas la distribution des intensités, même d'une façon infiniment petite, de sorte qu'on peut envisager le cas où le nombre des *liaisons* à supprimer serait infini ; tous les points équipotentiels seraient ainsi reliés deux à deux sur deux branches voisines AMB et AM'B, par des branches transversales. On devrait cependant conserver ces diverses branches isolées les unes des autres ou bien les faire infiniment courtes. En ce cas, il n'y aurait effectivement à prévoir aucun courant de l'une à l'autre, la surface de contact se réduisant à zéro. Ce contact parfait des brins AMB et AM'B pourra justement être établi, si les fils AMB et AM'B sont deux filets adjacents taillés dans la même substance. On retrouve par cette voie le résultat cherché.

Application des lois d'Ohm au pont de Wheatstone. — Appelons a, b, c, d, g, p les résistances des différentes branches (*fig.* 38) et i le courant passant dans la branche galvanométrique g, i' dans la branche c, i'' dans la branche de pile p (comptés dans le même sens positif sur les circuits qui bordent les mailles, en lesquelles le système est décomposé).

Fig. 38.



On a

$$J = a(i + i' + i'')^2 + b(i + i')^2 + ci'^2 + d(i' + i'')^2 + gi^2 + gi''^2,$$

$$J = (a + b + g)i^2 + (a + b + c + d)i'^2 + (a + d + p)i''^2 + 2(a + d)i'i'' + 2ai''i + 2(a + b)ii'.$$

On a donc les équations

$$\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial i} = (a + b + g)i + (a + b)i' + ai'' = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial i'} = (a + b)i + (a + b + c + d)i' + (a + d)i'' = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial i''} = ai + (a + d)i' + (a + d + p)i'' = E.$$

Digitized by Google

Cherchons quel est le courant i dans la diagonale contenant le galvanomètre; on trouve

$$i = \frac{DE}{\Delta},$$

Δ étant le déterminant des coefficients des trois équations et D le mineur,

$$D = \begin{vmatrix} a+b & a \\ a+b+c+d & a+d \end{vmatrix} = bd - ac.$$

Pour que le courant i soit nul, il faut que $bd - ac$ soit nul. L'équilibre du pont est alors obtenu. Supposons que l'erreur commise sur d soit ε, alors la condition d'équilibre sera

$$bd - ac = b\varepsilon,$$

et alors

$$i = \frac{b\varepsilon}{\Delta} E.$$

Nous allons chercher les branches de proportion les plus favorables pour avoir la sensibilité maximum; calculons donc Δ en tenant compte de ce qu'on a sensiblement $bd - ac = 0$. Développons

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b+g & a+b & a \\ a+b & a+b+c+d & a+d \\ a & a+d & a+d+p \end{vmatrix}$$

suivant les éléments de la dernière ligne, on a

$$\Delta = a(bd-ac) - (a+d)\begin{vmatrix} a+b+g & a \\ a+b & a+d \end{vmatrix} + (a+d+p)\begin{vmatrix} a+b+g & a+b \\ a+b & a+b+c+d \end{vmatrix},$$

le dernier mineur est égal à

$$(a+b+g)(a+b+c+d) - (a+b)(a+b).$$

Or on a sensiblement

$$c = \frac{bd}{a}, \qquad b+c = \frac{b}{a}(a+d),$$

$$a+b+c+d = \frac{(a+d)(a+b)}{a}.$$

Digitized by Google

Le dernier mineur peut donc s'écrire

$$\left[(a+b+g)(a+d)-a(a+b)\right]\frac{b+a}{a};$$

d'où

$$\Delta=\left[(a+b+g)(a+d)-a(a+b)\right]\left[\frac{(a+d+p)(b+a)}{a}-(a+d)\right]$$

ou, en ordonnant dans chaque facteur par rapport à a et b,

$$\Delta=\frac{1}{a}\left[a(g+d)+bd+gd\right]\left[ab+pa+(p+d)b\right],$$

$$\Delta=b\left[a(g+d)+bd+gd\right]\left[1+\frac{p}{b}+\frac{p+d}{a}\right].$$

D'où

$$i=\frac{\varepsilon E}{\left[a(g+d)+bd+gd\right]\left[1+\frac{p}{b}+\frac{p+d}{a}\right]}.$$

Nous appliquerons la formule

$$\Sigma(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)-(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')^2,$$

en posant

$$\alpha^2=a(g+d), \qquad \alpha'^2=\frac{p+d}{a},$$

$$\beta^2=bd, \qquad \beta'^2=\frac{p}{b},$$

$$\gamma^2=gd, \qquad \gamma'^2=1.$$

Le produit de deux termes positifs est ainsi égal à la somme de quatre carrés; le dernier $(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')^2$ est indépendant de a et b; si donc, on détermine a et b de manière que les trois premiers carrés s'annulent, c'est alors que Δ sera minimum; il suffit pour cela de prendre

$$\frac{\alpha'}{\alpha}=\frac{\beta'}{\beta}=\frac{\gamma'}{\gamma},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\sqrt{\frac{p+d}{a}}}{\sqrt{a(g+d)}}=\frac{\sqrt{\frac{p}{b}}}{\sqrt{bd}}=\frac{1}{\sqrt{gd}};$$

d'où

$$a=\sqrt{\frac{p+d}{g+d}}\sqrt{gd},$$

$$b=\sqrt{pg},$$

Digitized by Google

et par suite

$$\Delta = b\left[\sqrt{(p+d)(g+d)}+\sqrt{pd}+\sqrt{gd}\right]^2.$$

La valeur maximum du courant observé, quand on commet sur d l'erreur ε, est donc

$$i = \frac{\varepsilon E}{\left[\sqrt{(p+d)(g+d)}+\sqrt{pd}+\sqrt{gd}\right]^2}.$$

Autre problème. — La pile et le galvanomètre étant donnés, quand a-t-on intérêt à intervertir les diagonales pile et galvanomètre?

Appelons i_1 et Δ_1 ce que deviennent i et Δ quand on permute p et g. On aura

$$i_1 > i \quad \text{si} \quad \Delta_1 < \Delta.$$

Or

$$\Delta_1 - \Delta = (g-p)[(a+b)(c+d)-(a+d)(b+c)] = (g-p)(a-c)(d-b).$$

Si l'on est près de l'équilibre, les deux plus grandes branches sont contiguës; supposons que ce soient a et b :

$$a > c, \qquad b > d.$$

Donc

$$(a-c)(d-b) < 0.$$

On aura

$$\Delta_1 - \Delta < 0 \quad \text{si} \quad g > p.$$

Alors

$$i_1 > i.$$

Dans ce cas, on a intérêt à intervertir les diagonales p et g. Après cette interversion, g, la plus grande des deux résistances p, g, aboutira au point de concours des deux branches du pont les plus résistantes.

Théorème de M. Thévenin. — Considérons un réseau linéaire complexe et soient M et N deux points donnés de ce réseau où l'on observe les potentiels V et V'. Soit R la résistance ohmique comprise entre les deux points M et N du réseau. Si l'on vient à joindre les points M et N par un conducteur de résistance r, je dis que l'intensité du courant qui circulera dans cette nouvelle branche sera

$$i = \frac{V - V'}{r + R}.$$

Digitized by Google

Pour démontrer ce théorème, nous appliquerons le principe de superposition qui est une conséquence du caractère linéaire des lois d'Ohm et de Kirchhoff.

Considérons donc un premier état qui sera l'état primitif du réseau. Les points M et N seront reliés par le conducteur r, mais dans cette branche nous intercalerons une force électromotrice $E_1 = -(V - V')$; il est clair que le courant i_1 circulant dans cette branche sera nul et que rien ne sera changé à la distribution des potentiels dans le réseau primitif. Donc, $i_1 = 0$.

Considérons maintenant un second état qui se déduira de l'état primitif par la suppression de toutes les forces électromotrices du réseau, opérée en laissant subsister à la place des piles des résistances égales à leur résistance intérieure et par l'adjonction entre les points M et N du conducteur r contenant, cette fois, une force électromotrice

$$E_2 = V - V'.$$

Le courant qui circulera dans la branche r sera alors

$$i_2 = \frac{V - V'}{r + R},$$

en vertu de la définition de la résistance ohmique R.

Superposons ces deux états; on a l'état primitif auquel on a ajouté purement et simplement la branche r, puisque $E_1 + E_2 = 0$ et dans la branche r circule le courant

$$i = i_1 + i_2 = \frac{V - V'}{r + R}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. — Nous avons obtenu précédemment, dans le paragraphe intitulé *Réseaux de conducteurs parcourus par un courant permanent*, l'identité

$$\Sigma r i \delta i = \Sigma e \delta i.$$

Dans cette équation, rien ne suppose que δi soit infiniment petit, on admet seulement que les δi satisfont à la condition de continuité; on peut donc en particulier prendre pour δi les valeurs i' du courant dans la branche correspondante lorsque les forces électromotrices e sont remplacées par d'autres forces électromotrices e'. On a ainsi l'identité

$$\Sigma r i i' = \Sigma e i';$$

Digitized by Google

d'où

$$\Sigma e i' = \Sigma e' i,$$

par raison de symétrie.

Considérons maintenant un réseau, et dans ce réseau deux points A et B. Soient V_A le potentiel en A, V_B le potentiel en B, e_1, e_2, e_3 les diverses forces électromotrices; réunissons les points A et B par un fil de résistance r, d'après le théorème précédent, il circulera de A en B, dans cette branche, un courant I donné par la formule

$$I = \frac{V_1 - V_2}{r + R},$$

qui exprime que l'ensemble du réseau peut être considéré comme une pile, dont la force électromotrice à circuit ouvert serait $V_1 - V_2$, et dont la résistance intérieure serait R. Envisageons encore le même réseau avec la branche r, mais dans le nouvel état du réseau que nous allons maintenant considérer, admettons que toutes les forces électromotrices soient supprimées, sans que les résistances des branches soient modifiées pour cela; mais mettons dans la branche AB une force électromotrice $V_1 - V_2$ comptée positivement de A à B en suivant r. Soit alors I' le courant qui circule dans r, et $a_1, a_2, a_3, \ldots$ les courants qui circulent dans les branches où les forces électromotrices étaient tout à l'heure $e_1, e_2, e_3, \ldots$ respectivement. Cela posé, appliquons l'identité $\Sigma e i' = \Sigma e' i$ à nos deux états du réseau. Formons le Tableau :

1er état	f. e. m.	0	e_1	e_2	e_3
	intensités	I	i_1	i_2	i_3
2e état	f. e. m.	$V_1 - V_2$	0	0	0
	intensités	I'	a_1	a_2	a_3

Remarquons tout de suite qu'on aura

$$' = \frac{V_1 - V_2}{r + R}, \qquad \text{d'où} \qquad I' = I,$$

et l'égalité devient

$$V_1 - V_2 = \Sigma \frac{e_k a_k}{i},$$

d'où l'on peut conclure ceci :

Si l'on considère dans un réseau deux points A et B, la différence de potentiel entre ces deux points est une fonction linéaire des forces électromotrices existant dans les diverses branches du réseau, cha-

Digitized by Google

cune d'elles étant affectée d'un coefficient qui n'est autre que le rapport de l'intensité qui passe dans cette branche, à l'intensité qui circule dans le réseau du point A au point B, lorsqu'on supprime toutes les forces électromotrices sans modifier les résistances des branches.

Application. — Considérons n circuits dérivés $r_1, r_2, \ldots, n_n$ entre les points A et B. Faisons entrer en A une intensité I qui sortira en B, soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les intensités dans les branches $r_1, r_2, \ldots, r_n$, lorsque les forces électromotrices sont supprimées, on aura, d'une façon générale,

$$\frac{a_k}{I} = \frac{\frac{1}{r_k}}{\sum_1^n \frac{1}{r_i}},$$

d'où

$$V_1 - V_2 = \frac{\sum_1^n \frac{e_k}{r_k}}{\sum_1^n \frac{1}{r_k}},$$

formule connue.

Ici toutes les forces électromotrices doivent être comptées positivement de A vers B.

Remarquons, au sujet de la démonstration précédente, que si l'on augmente I dans un certain rapport, toutes les quantités $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sont augmentées elles-mêmes dans le même rapport, de sorte que les quantités $\frac{a_k}{I}$ sont bien définies et sont, en réalité, des fonctions plus ou moins complexes des résistances des diverses branches du réseau.

Théorème. — Étant donnés un réseau et deux branches quelconques AB et CD de ce réseau, si une force électromotrice E_1 placée dans la branche AB produit un courant i_2 dans la branche CD, une force électromotrice E_2 égale à E_1 placée dans la branche CD produira dans la branche AB un courant i_1 égal à i_2.

En effet, nous pourrons exprimer les intensités de toutes les branches du réseau en fonction de i_1, i_2 et de quelques autres paramètres indépendants; supposons-en un seul autre i_3. On a, dans le

Digitized by Google

premier cas,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial i_1} = ai_1 + b''i_2 + b'i_3 = E_1,$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial i_2} = b''i_1 + a'i_2 + bi_3 = 0,$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial i_3} = b'i_1 + bi_2 + a''i_3 = 0,$$

et, dans le second cas,

$$ai_1 + b''i_2 + b'i_3 = 0,$$
$$bi_1 + a'i_2 + bi_3 = E_1,$$
$$b'i_1 + bi_2 + a''i_3 = 0.$$

Dans le premier cas, on a

$$\Delta i_2 = E_1 \begin{vmatrix} b'' & b \\ b' & a'' \end{vmatrix}$$

et, dans le second cas,

$$\Delta i_1 = E_1 \begin{vmatrix} b'' & b' \\ b & a'' \end{vmatrix}.$$

Les deux mineurs sont égaux comme symétriques. Donc

$$i_1 = i_2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Extension au cas où les quantités E comprennent des forces électromotrices d'induction. — On peut appliquer les équations

$$\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial i} = E \quad \dots$$

au cas où les quantités E ne sont plus des forces électromotrices constantes, mais sont dues à une cause quelconque, électromagnétique par exemple.

L'énergie magnétique W est une fonction quadratique des intensités, et la force électromotrice d'induction engendrée dans une branche où circule le courant I est

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial I}.$$

On pourra dès lors écrire les équations sous la forme

$$\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial i} = E.$$

Digitized by Google

Supposons que toutes les forces électromotrices d'origine extérieure E soient nulles; les équations que nous obtiendrons seront celles des courants propres du réseau; les équations caractéristiques sont

$$\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial i} + \lambda \frac{\partial W}{\partial i} = 0.$$

Je considère le rapport

$$\lambda = -\frac{\frac{1}{2}J}{W}$$

et je cherche les maximums et minimums de λ; j'aurai

$$\frac{1}{2}J + \lambda W = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial x} + \lambda \frac{\partial W}{\partial x} + W\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0, \qquad \ldots.$$

Donc, si λ est maximum ou minimum, on aura

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0, \qquad \ldots$$

et par suite

$$\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial x} + \lambda \frac{\partial W}{\partial x} = 0.$$

Les équations écrites plus haut sont donc les conditions auxquelles doit satisfaire λ, si λ est maximum ou minimum. On démontre que toutes les racines de l'équation en λ sont réelles si l'une, au moins, des deux fonctions J ou W est positive, et si les deux fonctions sont positives, comme c'est le cas, on peut ajouter que toutes les racines sont négatives, puisque λ n'est susceptible de prendre que des valeurs négatives, J et W étant positifs.

Donc, le discriminant des équations a toutes ses racines réelles et négatives; or, l'équation en λ est l'équation caractéristique de l'équation différentielle en i. Il en résulte que i aura une expression de la forme $\Sigma A e^{\lambda t}$ où toutes les quantités λ sont réelles et négatives. Cela prouve que dans un réseau où il n'y a pas de condensateurs, il ne peut se produire d'oscillations. Les oscillations proviennent d'échanges entre l'énergie électrostatique et l'énergie magnétique.

Cas où le réseau comprend des capacités. — Supposons que certains sommets du réseau soient reliés à des conducteurs isolés placés dans le champ électrostatique. On voit que c'est là la façon la plus

Digitized by Google

générale d'introduire des condensateurs dans le réseau; on peut, en effet, considérer chaque armature comme un conducteur isolé, et s'il arrive qu'une armature soit reliée à la fois à deux sommets, on pourra toujours introduire dans le réseau un sommet supplémentaire de façon que chaque conducteur ne soit relié qu'à un seul nœud.

Soient v_1 le potentiel du conducteur relié au sommet 1 et i_1 le courant de charge de ce conducteur; l'application de la loi de Kirchhoff donne

$$i_{12} + i_{13} + \ldots + i_{1n} + i_1 = 0$$

et des équations analogues. L'application de la loi d'Ohm donne les équations

$$V_1 - V_2 = R_{12} i_{12} - E_{12},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

comme précédemment, et il faut ajouter

$$V_1 - v_1 = R_1 i_1 - E_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Multiplions les deux membres de ces équations respectivement par $\delta i_{12}, \ldots, \delta i_1$ et ajoutons, il vient

$$-\Sigma v_1 \delta i_1 = \Sigma R i \delta i - \Sigma E \delta i.$$

Mais, si W est l'énergie électrostatique, on a

$$2W = a q_1^2 + 2 b q_1 q_2 + \ldots$$

et

$$v_1 = \frac{\partial W}{\partial q_1} = a q_1 + b q_2 + \ldots.$$

Mais, d'une façon générale, on a

$$q = q_t + \int_t^{t+\theta} i \, dt;$$

d'où

$$\delta q = \int_t^{t+\theta} \delta i \, dt,$$

ou bien, en supposant θ suffisamment petit,

$$\delta q = \theta \, \delta i.$$

On a donc

$$-\Sigma v_1 \delta i = -\Sigma \frac{\partial W_e}{\partial q} \frac{\delta q}{\theta} = -\frac{1}{\theta} \delta W_e,$$

Digitized by Google

δW_e étant la variation de l'énergie électrostatique pendant le temps θ.

Nous arrivons donc, dans le cas où le réseau contient des capacités, à la formule plus générale

$$\Sigma \frac{\delta W_e}{\theta} + \frac{1}{2}\delta J - \Sigma E \delta i = 0.$$

Exemple : Décharge du condensateur. On a

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C},$$

$$J = R i^2,$$

$$E i = E i;$$

d'où

$$\frac{\delta W_e}{\theta} = \frac{Q}{C}\frac{\delta Q}{\theta},$$

$$\frac{1}{2}\delta J = R i \delta i,$$

$$\delta E i = E \delta i$$

et

$$\frac{\delta Q}{\theta} = \delta i;$$

donc

$$\frac{Q}{C} + R i = E.$$

Variation de J à potentiel constant ou à intensité constante. — La fonction J est une fonction quadratique des intensités i; donc, en vertu des équations générales, c'est aussi une fonction quadratique des forces électromotrices e. Il en résulte qu'on peut appliquer à la fonction J le mode de raisonnement déjà appliqué à la force vive d'un système et à l'énergie électrostatique, de sorte que si φ désigne un paramètre qui sera par exemple une résistance, on aura

$$\frac{\partial J_e}{\partial \varphi} = -\frac{\partial J_i}{\partial \varphi}.$$

Ceci nous montre que, dans une modification du réseau, la variation de la chaleur Joule à potentiels constants est égale et de signe contraire à la variation de la chaleur Joule à intensités constantes.

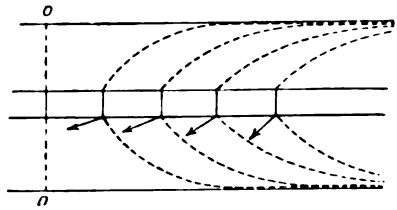
Répartition du champ électrique au voisinage d'un conducteur parcouru par un courant. — Remarquons que les équations qui déterminent la distribution du courant dans les conducteurs ne dépendent

Digitized by Google

que des forces électromotrices et pas du tout du champ électrostatique extérieur, tandis qu'au contraire, la distribution électrostatique dans le voisinage d'un conducteur parcouru par un courant dépend, non seulement de la façon dont sont placés les corps conducteurs isolés répartis dans le champ, mais aussi de la répartition du courant.

Si les courants sont permanents et si le champ extérieur est un champ électrostatique, les surfaces équipotentielles du champ se raccorderont avec les surfaces équipotentielles du courant telles qu'elles sont déterminées par l'électromètre (*fig.* 39).

Fig. 39.



Considérons, par exemple, un câble isolé parcouru par un courant permanent dont l'extérieur est à la terre. Les surfaces équipotentielles du courant sont des sections droites de l'âme, mais le conducteur n'étant pas en équilibre électrostatique, l'intensité du champ n'est pas normale à la surface de ce conducteur, mais oblique; cette obliquité plus ou moins grande dépend de la répartition des corps électrisés dans le champ et, en cherchant la composante normale de l'intensité du champ, on peut obtenir la quantité d'électricité qui se trouve à la surface du conducteur.

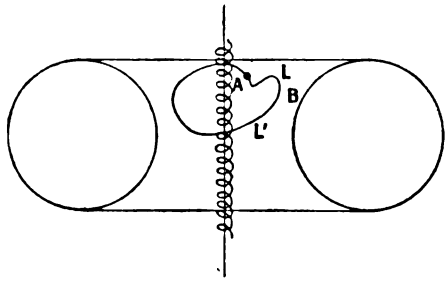
Vaschy a montré que si l'âme d'un câble est parcourue par un courant permanent, ce câble a la même capacité que lorsqu'il est isolé à son extrémité, c'est-à-dire à l'état statique. Mais il peut arriver aussi que le problème se pose différemment, et que, dans le champ électrique, il n'y ait pas de potentiel ou que ce potentiel n'y soit pas uniforme.

Considérons, par exemple (*fig.* 40), un tore et supposons que, le long de son axe, il y ait un solénoïde infiniment petit tel que la variation du flux magnétique à l'intérieur de ce solénoïde soit proportionnelle au temps; il se formera un champ électrique dont les lignes de force sont des cercles centrés sur le solénoïde. Le tore est parcouru

Digitized by Google

par des courants induits; dans ce cas, il n'y a pas lieu de chercher un potentiel uniforme, puisqu'il n'existe pas; en effet, si l'on part d'un

Fig. 40.

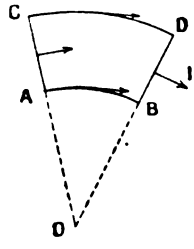


point A du tore pour aller à un point B de ce même tore par deux lignes différentes L et L', on n'aura pas $\int_L = \int_{L'}$ si le contour formé par L et L' embrasse l'axe du tore. On aurait alors

$$\int_{L'} = \int_L + 4\pi\mu \frac{dH}{dt},$$

$\frac{dH}{dt}$ étant la dérivée du flux magnétique total à l'intérieur du solénoïde; quant à la répartition du courant, dans ce cas-là, elle est la même que si l'on supposait une coupure infiniment mince dans le tore constituée par une lame de fer comprise entre deux lames de cuivre maintenues à deux températures différentes (*fig.* 41); on peut

Fig. 41.



alors parler d'un potentiel uniforme, puisqu'on ne peut traverser la coupure formée par cette pile thermo-électrique infiniment mince, laquelle occuperait un demi-plan méridien bordé par l'axe.

Digitized by Google

Je satisfais à toutes les conditions du problème en supposant que le courant i est de la forme $\frac{A}{r}$; on le vérifie facilement.

Le courant dans le tore serait le même que le flux d'induction magnétique dans un tore aimanté circulairement. Les surfaces équipotentielles dans l'air, comme dans l'intérieur du tore, seraient des plans méridiens, ou plutôt des demi-plans méridiens s'appuyant sur l'axe.

Quand il s'agit de la pile thermo-électrique précédemment décrite, on trouverait en tournant autour de l'axe, à partir de la face positive de cette pile, les demi-plans méridiens qui sont les surfaces équipotentielles depuis E_1, potentiel du pôle positif jusqu'à E_2 potentiel du pôle négatif. On aurait un potentiel uniforme qui repasserait ensuite brusquement de E_2 à E_1 quand on franchirait la pile, pour revenir sur sa face positive.

Quand, au contraire, il s'agit du solénoïde précédemment décrit, on traverserait, en tournant autour de l'axe, à partir d'un plan origine, lequel formerait une surface équipotentielle, au potentiel de référence E_1, les demi-plans méridiens, lesquels formeraient encore des surfaces équipotentielles, et l'on arriverait au potentiel E_2 quand on reviendrait au point de départ; mais en continuant la rotation, il n'y aurait aucune discontinuité dans la valeur du potentiel, et l'accroissement du potentiel ayant été $E_2 - E_1$ au bout du premier tour, il serait $2(E_2 - E_1)$ au bout du second, etc.; de sorte que l'on pourrait bien dire encore que les demi-plans méridiens sont des surfaces équipotentielles, mais le potentiel n'y aurait pas une valeur uniforme; il serait susceptible de prendre sur chacune d'elles une infinité de valeurs différant les unes des autres de $E_2 - E_1$.

Courants permanents dans un milieu homogène. — Soient (u, v, w) les composantes du courant i; on doit satisfaire aux conditions suivantes :

1° A la surface, la composante normale du courant est nulle;

2° A l'intérieur de la masse, en vertu de la loi de continuité, la distribution de i est solénoïdale, et en vertu de la loi d'Ohm, elle est irrotationnelle.

Le problème est tout à fait analogue à celui du mouvement d'un fluide incompressible sans tourbillon.

Digitized by Google

On peut se donner la différence de potentiel des deux côtés d'une surface équipotentielle.

De nombreux cas de distribution du vecteur i s'obtiennent par voie de synthèse.

Nous allons expliquer la méthode; nous l'appliquerons ensuite au cas d'un tore conducteur homogène, puis au cas d'un milieu conducteur indéfini dans lequel est plongé un tore en substance isolante.

Considérons la répartition solénoïdale d'un vecteur μ; donnons-nous-la arbitrairement. Prenons le potentiel vecteur A(FGH) des vecteurs μ et appelons $\Phi(XYZ)$ le tourbillon de A. On aura, pour fixer les idées,

$$\frac{\partial \mu_x}{\partial x} + \frac{\partial \mu_y}{\partial y} + \frac{\partial \mu_z}{\partial z} = 0,$$

$$F = \int \mu_x \frac{d\varpi}{r}, \qquad G = \int \mu_y \frac{d\varpi}{r}, \qquad H = \int \mu_z \frac{d\varpi}{r},$$

$$X_{(\alpha\beta\gamma)} = \frac{\partial G}{\partial \gamma} - \frac{\partial H}{\partial \beta}, \qquad \ldots.$$

Soit (S) une surface qui contienne à son intérieur toutes les masses μ. On sait que $\Phi(XYZ)$ a une distribution irrotationnelle en dehors de la surface S; elle est en même temps solénoïdale. Les tubes de flux se fermeront sur eux-mêmes ou viendront s'appuyer sur une coupure qui formera une surface de discontinuité du vecteur Φ. On en conclut que le vecteur $\Phi(XYZ)$ représente un cas particulier de distribution admissible du courant à l'intérieur d'une masse conductrice U qui épouserait la forme du tube de flux considéré. On voit, en effet, que Φ satisfait à l'intérieur de U et à sa surface à toutes les conditions imposées au vecteur $i(u, v, w)$.

Considérons le vecteur $\Phi(XYZ)$. Imaginons qu'en dehors de U on fasse partout $\Phi = 0$ en conservant à Φ sa valeur précédente à l'intérieur de U; appliquons le théorème de Vaschy; les masses ρ, μ, σ sont nulles à l'intérieur de U; il ne reste que les masses vectorielles de surface τ à la surface de U. Si donc $a(fgh)$ est le potentiel vecteur des masses τ, le vecteur Φ sera le tourbillon de $a(fgh)$. Pour préciser les idées, on aura

$$4\pi\tau_x = nY - mZ, \qquad \ldots;$$

$$f = \int \tau_x \frac{dS}{r}, \qquad \ldots,$$

$$X = \frac{\partial g}{\partial \gamma} - \frac{\partial h}{\partial \beta}, \qquad \ldots.$$

Digitized by Google

Les masses vectorielles superficielles τ peuvent être considérées comme représentant le flux d'une substance dénuée d'épaisseur à la surface du volume U. Nous avons montré que si l'on trace à la surface du volume U une ligne fermée L, le flux total de τ qui traverse L est nul. Les masses τ forment donc autour du tube U une sorte de solénoïde dont l'action sur un point extérieur serait égale à zéro et dont l'action sur un point intérieur est Φ.

Appliquons ces principes.

Considérons des masses μ qui sont réparties le long de l'axe des z avec une densité uniforme, quel que soit le point M considéré sur l'axe.

Remarquons que le potentiel vecteur n'intervient que par ses dérivées et que, par suite, on peut négliger toute quantité indépendante des coordonnées du point $P(\alpha, \beta, \gamma)$ où l'on envisage le potentiel vecteur. On aura donc

$$F = 0, \qquad G = 0, \qquad H = \int \frac{\mu\, dz}{r_{MP}} = -2\mu \log r + \text{const.},$$

en posant

$$r^2 = \alpha^2 + \beta^2;$$

d'où

$$X = 2\mu \frac{\beta}{r^2}, \qquad Y = -2\mu \frac{\alpha}{r^2}, \qquad Z = 0.$$

Les lignes de flux seront données par

$$\frac{d\alpha}{\beta} = \frac{d\beta}{-\alpha} = \frac{d\gamma}{0}$$

ou

$$\alpha^2 + \beta^2 = \text{const.}, \qquad \gamma = \text{const.}$$

Je définirai le volume U comme le volume engendré par le cercle méridien

$$(\alpha - a)^2 + \beta^2 = R^2$$

tournant autour de Oz comme axe de révolution.

On aura

$$4\pi\tau = \frac{2\mu}{r},$$

et τ sera dirigé tangentiellement aux cercles méridiens.

Le flux du vecteur τ à la surface de U, entre deux plans méridiens, est constant, et ainsi le tube U se trouve entouré d'un solénoïde

Digitized by Google

de courants superficiels dont l'action, à son intérieur, est égale à $\Phi(XYZ)$.

Le calcul direct de la rotation du potentiel vecteur de ces courants superficiels peut aussi s'effectuer ; mais nous avons pu l'éviter par les considérations générales qui nous ont guidés.

Il est assez remarquable que le vecteur Φ satisfait à la surface de U, comme le vecteur τ, à la condition que son flux, à travers une courbe fermée, soit égal à zéro. Cela tient à ce que deux filets voisins sont parallèles. Considérons, en effet, le tube de flux qui a pour section droite le petit rectangle limité entre deux circonférences méridiennes concentriques de rayon R et $R + dR$, et deux rayons voisins faisant un angle $d\varphi$. Le flux à travers un méridien est $\Phi R\, d\varphi\, dR$; il se conserve le long du filet, donc $\Phi R\, d\varphi$ se conserve aussi; donc le flux de Φ à travers une courbe fermée L à la surface de U est nul, car la ligne L peut se décomposer en éléments de parallèles et de méridiens. Le long des parallèles, le flux est nul et les éléments de courbes méridiennes se correspondent deux à deux, avec des flux égaux et contraires. Le vecteur Φ se distribue donc à la surface du tore en forme de filets circulaires de flux constant. Le potentiel vecteur de ces courants superficiels a un tourbillon T. Les lignes de flux de ce tourbillon sont évidemment dirigées dans les plans méridiens. Elles entourent complètement le tore. A l'intérieur du tore lui-même, T sera identiquement nul. La distribution des lignes de flux du tourbillon T représentera une distribution de courant compatible avec les conditions générales ; ces courants circuleront dans une masse conductrice illimitée au sein de laquelle serait plongé un tore en matière isolante.

Rappelons enfin un autre cas particulier bien connu. Si l'on considère une plaque limitée par deux cercles qui se coupent aux points A et B, qu'on pourrait appeler *les sommets de la corne*, les courants entrant par A et sortant par B suivent à la surface de la plaque des lignes de flux qui sont la famille des cercles qui passent par les points A et B.

Conducteur hétérogène. — Nous avons obtenu la formule

$$i = ch,$$

qui relie le vecteur intensité de courant au vecteur intensité de champ.

Digitized by Google

Le vecteur h a une distribution irrotationnelle; le vecteur i a une distribution solénoïdale. Tels sont les résultats immédiats de l'expérience. La loi d'Ohm, dont $i = ch$ est l'expression, montre que chacun de ces vecteurs participe à la propriété établie pour l'autre.

Nous avons trouvé, en électrostatique, une relation analogue entre E et $4\pi D$; et nous avions de même

$$4\pi D = \mu_e E.$$

A la surface de séparation de deux milieux homogènes, nous aurons, pour les composantes normales,

$$i'_n = i''_n,$$

parce que le flux se conserve, d'où

$$c' h'_n = c'' h''_n.$$

Donc $h'_n - h''_n$ n'est pas nul; c'est-à-dire que h_n éprouve une discontinuité.

De même, des deux côtés de la surface on aura, en vertu de l'existence du potentiel, pour les composantes tangentielles,

$$h'_s = h''_s.$$

Conducteurs non isotropes. — Si l'on considère une même substance homogène et qu'on y découpe dans des directions différentes par rapport aux axes cristallographiques des fils de dimensions identiques, on trouvera que des intensités i différentes correspondent à une même force électromotrice appliquée aux extrémités.

On en conclura que la résistance varie avec la direction par rapport aux axes cristallographiques.

Tandis que la loi $i = ch$ des milieux isotropes pouvait faire supposer une identité de nature entre les vecteurs i et h, l'étude des corps anisotropes nous amènerait à les considérer comme bien distincts.

Le vecteur i a toujours une distribution solénoïdale; le vecteur h une distribution irrotationnelle.

Chaque composante de i est une fonction linéaire des composantes de h.

Loi de Joule. — Considérons un élément $d\varpi$ de tube de flux de

Digitized by Google

section dS, de longueur ds. La quantité d'électricité qui, suivant la loi de Faraday, traverse dS, sera $i\,ds\,dt$, pendant le temps dt, et le travail, si dx, dy, dz sont les composantes de ds, sera

$$i\,d\mathrm{S}\,dt(\mathrm{X}\,dx+\mathrm{Y}\,dy+\mathrm{Z}\,dz),$$

en appelant i la densité du courant et $h(\mathrm{XYZ})$ l'intensité du champ. Or, on a

$$i\frac{dx}{ds}=u,\qquad i\frac{dy}{ds}=v,\qquad i\frac{dz}{ds}=w.$$

Il vient donc

$$d\varpi(u\mathrm{X}+v\mathrm{Y}+w\mathrm{Z})\,dt.$$

Si ce travail est intégralement transformé en chaleur, le dégagement de chaleur par unité de temps sera, dans l'unité de volume,

$$u\mathrm{X}+v\mathrm{Y}+w\mathrm{Z},$$

de même qu'on avait

$$ch^2=i\times h$$

dans le cas des milieux isotropes.

Précisons. En un point O du conducteur, traçons des canaux infiniment déliés, parallèles aux axes de longueur dx, dy, dz; soient $\mathrm{P}\,dx$, $\mathrm{Q}\,dy$ et $\mathrm{R}\,dz$ les différences de potentiel entre leurs extrémités, la différence de potentiel entre les bases du canal ds qui a pour composantes dx, dy, dz sera $\mathrm{P}\,dx+\mathrm{Q}\,dy+\mathrm{R}\,dz$. Le vecteur E(PQR) définit le champ électrique. En ce même point O, traçons des canaux semblables suivant les arêtes du tétraèdre OABC, dont trois faces S_1, S_2, S_3 sont normales aux axes; soient $u\mathrm{S}_1$, $v\mathrm{S}_2$ et $w\mathrm{S}_3$ les intégrales de ligne de la force magnétique le long des contours S_1, S_2, S_3; l'intégrale de ligne le long du contour de la base S sera $u\mathrm{S}_1+v\mathrm{S}_2+w\mathrm{S}_3$. Ce sera le flux iS du courant à travers la base, si le flux se conserve. Donc $i(uvw)$ définit le courant. Le phénomène ne dépend que de la structure du réseau cristallin et non de la molécule; au milieu réel on peut substituer un réseau continu et considérer i et E comme des fonctions continues des coordonnées. Bornons aux premiers termes le développement en série; il y a égalité symétrique en chaque point et l'on a $\mathrm{E}=\varphi i$, la fonction φ étant vectorielle linéaire autoconjuguée.

Digitized by Google

CHAPITRE III.

MAGNÉTISME ET ÉLECTROMAGNÉTISME.

Force magnétique. — L'aimantation d'un morceau d'acier par le courant électrique fait apparaître dans la substance de l'acier une propriété nouvelle, le magnétisme, que nous nous proposons d'étudier.

Considérons une aiguille d'acier en équilibre. Si nous faisons passer un courant électrique dans le voisinage, puis que nous interrompions ce courant, nous constatons que les forces qui agissaient sur elle ne s'équilibrent plus. Nous sommes en présence d'un aimant. Nous devons analyser tout d'abord les forces qui agissaient sur l'aiguille; c'étaient les différentes forces de contact, c'était la pesanteur, c'étaient aussi, si l'on veut, les forces électriques, que nous supposons préalablement connues. Ces forces ne sont plus maintenant en équilibre. Les forces de contact sont cependant restées les mêmes; de plus, l'aiguille n'a ni gagné, ni perdu de matière; donc sa masse et, par suite, son poids ont dû rester invariables; enfin, si l'aiguille n'était pas électrisée au préalable, elle ne l'est pas devenue ultérieurement; on le reconnaîtrait, au besoin, au moyen du plan d'épreuve.

Nous dirons alors que nous sommes en présence d'une nouvelle force qui se manifeste : la force magnétique, et nous reconnaîtrons, sans hésiter, son intervention à certains caractères constants, parmi lesquels on peut citer la sensibilité extrême que manifeste la nouvelle force à des changements dans la forme et la position des masses de fer placées dans le voisinage des corps étudiés.

Champ terrestre. — Avant de chercher les lois de l'action réciproque des corps magnétiques, des aimants, etc., il convient tout d'abord d'analyser l'action que ces corps subissent individuellement

Digitized by Google

dans le champ terrestre magnétique auquel on ne peut les soustraire.

Suspendons un aimant par son centre de gravité, par exemple au moyen d'une suspension à la cardan, comme pour le gyroscope : l'action subie se décompose en une force F appliquée à ce centre de gravité et en un couple C. Je dis que la force F est nulle. En effet, cette force n'a pas de composante horizontale, car le fil de suspension reste vertical, et si l'aiguille est mise sur un flotteur très mobile, elle ne se déplace vers aucune direction privilégiée. La force n'a pas non plus de composante verticale; en effet, comme l'aiguille n'a ni gagné ni perdu de matière, son poids n'a pu changer; si, après l'avoir aimantée, on la pèse de nouveau, le poids apparent que l'on constatera sera la somme du poids réel préalablement déterminé et de la composante verticale de F. Or, le poids apparent est égal au poids réel, donc la force F n'a pas de composante verticale.

La force F étant nulle, il suffit d'examiner le couple directeur. Or, l'expérience montre que l'aiguille, tout en étant suspendue par son centre de gravité, est susceptible de prendre une infinité de positions d'équilibre. Considérons-la dans une des positions d'équilibre où elle s'est fixée; marquons deux de ses points et notons leur position dans l'espace. Plaçons ensuite l'aimant dans une autre position d'équilibre et notons la nouvelle position occupée dans l'espace par les deux points marqués de l'aimant. Joignons la première et la seconde position de chacun des points marqués et traçons les plans perpendiculaires à ces lignes en leur milieu. Voici ce que l'on reconnaîtra :

1° L'intersection de ces plans est une ligne que nous pourrons considérer comme représentant la direction de la force magnétique dans l'espace, car elle y occupe la même position absolue, quel que soit le barreau d'épreuve choisi;

2° Cette intersection rapportée à trois points marqués de l'aimant représente dans ce corps solide un axe que nous pourrons appeler l'*axe magnétique de l'aimant*, car elle occupe dans ce corps une position invariable, quelles que soient les positions d'équilibre qui ont servi à la déterminer, et ces positions sont en nombre infini. Ajoutons que cet axe magnétique restera encore invariable, quel que soit le point du champ terrestre où l'on opère.

L'axe magnétique se dirige sensiblement vers le Nord. Son pôle Nord est l'extrémité qui se dirige vers le Nord.

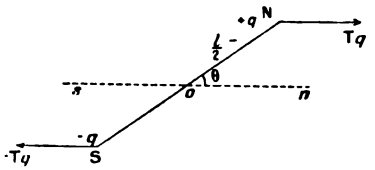
Digitized by Google

Quelles sont les lois du couple terrestre?

L'axe magnétique se fixe dans une direction *ns* (*fig.* 42); si on l'écarte de sa position d'équilibre de façon à l'amener en NS, l'angle d'écart étant θ, l'aimant sera alors soumis à un couple qu'on pourra représenter par un vecteur $M = C \sin\theta$ perpendiculaire au plan de NS et *ns*.

Si nous imaginons que l'axe magnétique tourne autour d'un

Fig. 42.



point O et qu'en deux points de cet axe, à des distances arbitraires $+\frac{l}{2}$, $-\frac{l}{2}$, de part et d'autre du point O, on fixe deux masses fictives $+q$ et $-q$ soumises à des forces Tq, $-Tq$ parallèles à un vecteur T de direction *sn*, l'axe sera soumis à un couple

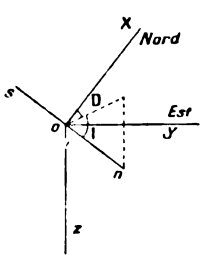
$$M' = Tql \sin\theta,$$

qui sera égal à M si l'on pose

$$Tql = C.$$

Pour examiner comment on peut reconnaître que le couple M est donné par $M = C \sin\theta$, nous allons nous occuper du système équi-

Fig. 43.



valent représenté par les masses fictives $+q$ et $-q$ dans le champ du vecteur T. Nous supposons fixe le point O (*fig.* 43) et nous rap-

Digitized by Google

portons NS à trois axes rectangulaires, deux horizontaux vers le Nord et l'Est, l'autre vertical vers le bas. On aurait alors, pour composantes du vecteur T,

$$X = T\cos I\cos D, \qquad Y = T\cos I\sin D, \qquad Z = T\sin I,$$

et les coordonnées de la masse $+q$ seront

$$x = \frac{l}{2}\cos i\cos d, \qquad y = \frac{l}{2}\cos i\sin d, \qquad z = \frac{l}{2}\sin i.$$

Nous allons étudier deux cas : celui de la boussole de déclinaison et celui de la boussole d'inclinaison.

Premier cas : Aiguille de déclinaison. — On a

$$i = 0,$$
$$T\cos I = H.$$

On soumet l'aiguille à un couple de torsion C dans la balance de Coulomb, couple que nous supposons bien connu; alors le travail virtuel est

$$C\,\delta d = 2q(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)$$

ou, en faisant le calcul,

$$C = H\,lq(-\cos D\sin d + \sin D\cos d) = H\,lq\sin(D - d).$$

L'expérience confirme rigoureusement cette déduction.

Deuxième cas : Aiguille d'inclinaison. — Dans ce cas, $d = \text{const.}$ L'aiguille est mise dans un azimut particulier et on la laisse se fixer d'elle-même dans une position d'équilibre; on a alors

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = 0.$$

Or

$$\delta x = -\frac{l}{2}\sin i\cos d\,\delta i,$$
$$\delta y = -\frac{l}{2}\sin i\sin d\,\delta i,$$
$$\delta z = +\frac{l}{2}\cos i\,\delta i;$$

d'où

$$\cot I\cos(D - d) = \cot i.$$

Cette relation est bien confirmée par l'expérience.

Digitized by Google

Champ magnétique quelconque. — Nous connaissons donc maintenant le couple terrestre en chaque point. Il sera, par suite, possible d'en tenir compte quand nous explorerons le champ magnétique dû à toute autre cause.

Examinons donc un champ magnétique quelconque dû, par exemple, soit à un aimant, soit à un courant. Nous amènerons dans ce champ une aiguille d'épreuve assez petite pour que le champ puisse être considéré comme uniforme dans la région d'observation. Nous la supposerons de plus assez faiblement aimantée pour ne pas troubler sensiblement le champ à explorer. On constate que la loi est la même que pour le champ terrestre, la force est nulle et le couple directeur est $M = C \sin\theta$, θ étant l'angle des deux positions de l'axe magnétique de l'aiguille (position d'équilibre et position forcée).

De plus, la position de l'axe magnétique, quand l'aiguille est dans une de ses positions d'équilibre, est invariable dans l'espace, quelle que soit l'aiguille d'épreuve utilisée. Cette direction est alors, par définition, celle de l'intensité du champ magnétique.

Quant au coefficient C du couple $C \sin\theta$ observé, il variera et avec le lieu d'observation et, pour un même lieu, suivant l'aiguille d'épreuve. Donc, avec une première aiguille, nous observons aux points M_1, M_2, M_3 les coefficients C_1, C_2, C_3; avec une seconde aiguille, nous observons aux mêmes points les coefficients C'_1, C'_2, C'_3; avec une troisième aiguille, les coefficients C''_1, C''_2, C''_3.

Nous pouvons donc former avec les C un Tableau à double entrée :

M_1	M_2	M_3	
C_1	C_2	C_3	γ
C'_1	C'_2	C'_3	γ'
C''_1	C''_2	C''_3	γ''
h_1	h_2	h_3	

Nous constaterons que les nombres d'une même colonne sont proportionnels à des nombres $\gamma, \gamma', \gamma''$ qui, étant indépendants du lieu d'observation, caractérisent l'aimant d'épreuve. Les nombres d'une même ligne sont proportionnels à des nombres h_1, h_2, h_3 qui, étant indépendants de l'aiguille d'épreuve employée, ne dépendent que du champ magnétique aux points d'observation. Par un choix convenable de h_1

Digitized by Google

et γ, on pourra faire en sorte que $C_1 = h_1\gamma$ et alors, en vertu des proportionnalités, on aura d'une façon générale $C = h\gamma$.

Si j'appelle $\pm f$ la force qui s'exerce sur chacune des masses fictives $\pm q$ que nous avons déjà envisagées, on aura

$$fl = h\gamma \qquad \text{ou} \qquad \frac{f}{h} = \frac{\gamma}{l} = q.$$

La longueur l est arbitraire, mais on devra avoir $lq = \gamma$.

Ainsi, les aimants d'épreuve sont caractérisés au point de vue de l'action qu'ils subissent par leur équivalence avec un aimant fictif composé de deux quantités de magnétisme $+q$ et $-q$ appliquées en deux points N, S de leur axe magnétique, situés à une distance l arbitraire, telle que $lq = \gamma$.

ÉTUDE DU CHAMP CRÉÉ PAR UN AIMANT.

Considérons une surface idéale S enveloppant le volume U, à l'intérieur duquel sont situés tous les aimants dont nous voulons étudier l'influence sur l'état du milieu U′ extérieur à la surface S. Portons notre attention, dans le milieu U′, sur un élément de volume (u') très petit et explorons le champ à l'intérieur de ce volume (u') au moyen d'une petite aiguille d'épreuve de moment γ. Cette aiguille devra pouvoir être considérée comme très petite par rapport aux dimensions du volume (u') lui-même. Alors le champ à l'intérieur de (u') se comporte, par rapport à l'aimant d'épreuve (γ), sensiblement comme le champ terrestre par rapport à un barreau aimanté, c'est-à-dire que le champ y est uniforme et s'y trouve défini par un vecteur bien déterminé en grandeur, direction et sens. Nous l'appellerons H et nous désignerons ses composantes par (α, β, γ). Maintenant, faisons la même exploration en divers points, dans de petits éléments de volume (u'_1), (u'_2), ... Demandons-nous ce que l'expérience apprend.

Première loi. — L'expérience donne la loi suivante : la répartition du vecteur H est une distribution irrotationnelle. L'expression

Digitized by Google

mathématique de cette propriété, ce sont les équations

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0$$

ou $\operatorname{rot} H = 0$ (*voir* le Chapitre relatif aux notations vectorielles).

Nous pouvons nous appuyer en premier lieu, pour la justification de cette loi, sur les expériences de Coulomb. Il considérait une aiguille uniformément aimantée, fine et longue, placée le long de l'axe des z et dont l'une des extrémités, un pôle, était placée à l'origine O. Il étudiait, en se référant aux lois de la torsion, l'action éprouvée par une seconde aiguille analogue assujettie à se mouvoir autour d'un point en demeurant dans le plan des xy. Il a trouvé que l'intensité du champ avait pour composante dans le plan des xy un vecteur dirigé suivant un rayon partant du pôle placé à l'origine et dont la grandeur variait en raison inverse du carré de la distance à l'origine. Par suite, dans le plan des xy, il y a un potentiel; d'où $\operatorname{rot} H = 0$.

D'autre part, Coulomb a établi que l'action due à la présence simultanée de plusieurs aimants est la résultante des actions dues à chacun des aimants considérés séparément; c'est ce qui a lieu, du moins, si les aimants méritent le nom d'*aimants permanents*. Il en résulte que l'existence du potentiel se trouve ainsi étendue à des cas très généraux.

Appliquons maintenant la théorie de Vaschy. L'existence d'un potentiel se traduit par l'équation $\mu = 0$.

Sur la surface S, il y aura des masses scalaires σ et des masses vectorielles τ. Si la surface S est elle-même une surface équipotentielle, les masses vectorielles τ sont nulles.

Deuxième loi. — 1° L'expérience montre qu'un aimant a deux pôles. Si, par exemple, on considère une longue aiguille fine aimantée uniformément, l'expérience de Coulomb apprend qu'il y a deux points P_1 et P_2 situés vers les extrémités de l'aiguille, tels que si l'on appelle r_1 la distance d'un point P quelconque du champ au point P_1 et r_2 la distance de ce même point au point P_2, le potentiel au point P est de la forme

$$\frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2} = \text{const.}$$

Digitized by Google

Une aiguille aimantée de ce genre agit donc à distance comme deux masses $+m$ et $-m$, l'une répulsive, l'autre attractive, dont l'action suivrait la loi de Newton et qui seraient égales l'une à l'autre, en valeur absolue.

2° *Expérience de l'aimant brisé.* — Considérons le champ précédent; il dérive d'un potentiel

$$V = \frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2}.$$

Le flux de l'intensité H de ce champ, à travers une surface fermée quelconque décrite dans le volume U', qu'elle enveloppe ou non la surface S, est égal à zéro.

Cherchons, puisqu'il y a, en apparence tout au moins, deux masses $+m$ et $-m$ aux points P_1 et P_2 respectivement, à les isoler l'une de l'autre, en brisant l'aimant entre P_1 et P_2. L'expérience apprend alors que l'aimant P_1P_2 se trouve transformé en deux aimants P_1Q_1 et Q_2P_2, la coupure étant faite au point Q, qui s'est dédoublé en Q_1 et Q_2. Replaçons bout à bout les deux aimants P_1Q_1 et Q_2P_2; nous reconstituons l'aimant P_1P_2, au point de vue de l'action extérieure : l'intensité du champ est redevenue la même. Autrement dit, cette action n'est pas modifiée, si nous traçons dans la substance de l'aimant une coupure infiniment étroite. Généralisons ce résultat. Nous pouvons décomposer le volume U, où se trouvent les aimants, en deux volumes partiels distincts U_1 et U_2 séparés par une coupure que j'appellerai Σ. Cette coupure a deux faces infiniment voisines; elle forme un feuillet de volume infiniment petit; la première face du feuillet borde le volume U_1, la seconde borde le volume U_2. On peut vider de toute matière magnétique l'épaisseur du feuillet et imaginer que la substance du milieu U' y pénètre et s'y prolonge; ce sont des modifications négligeables. La surface qui, maintenant, limite le milieu U' comprend alors deux surfaces distinctes : l'une est formée d'une portion S_1 de la surface S et de la face Σ_1 du feuillet Σ; l'autre est formée de la portion complémentaire S_2 de la surface S et de la face Σ_2 du feuillet Σ. L'expérience de l'aimant brisé généralisée nous apprend que le flux du vecteur H est nul à travers la surface $S_1 + \Sigma_1$ et qu'il est nul aussi à travers la surface $S_2 + \Sigma_2$.

Nous avons l'image d'une coupure de ce genre dans l'entrefer très

Digitized by Google

étroit compris entre les faces planes des masses polaires d'un électro-aimant, lorsqu'on rapproche l'une de l'autre ces masses.

CHAMP DANS UN CANAL ; CHAMP DANS UNE COUPURE.

1° On sait que, pour certaines expériences, les masses polaires sont percées perpendiculairement à leurs faces d'un trou cylindrique de faible diamètre.

Or, quand on place dans ce trou une aiguille d'acier qui déborde dans l'entrefer et qu'on excite l'électro-aimant pour l'aimanter, on trouve que l'intensité d'aimantation ainsi communiquée à l'aiguille est faible dans la partie qui est demeurée à l'intérieur du canal et qu'elle est forte dans la partie comprise entre les masses polaires. L'intensité du champ magnétique est la cause évidente de la magnétisation. Donc cela nous indique que le champ est moindre dans la cavité en forme de cylindre allongé que dans l'entrefer, moindre dans le canal qui suit les lignes de force que dans la cavité, en forme de disque plat normal à ces lignes, constituée par cet entrefer.

On voit par là la nécessité de désigner par une lettre différente l'intensité du champ en un point donné, suivant qu'on le mesure dans un canal qui suit les lignes de force ou dans une fente qui leur est perpendiculaire.

En dehors du volume U, une telle distinction est superflue. Nous appellerons H′ la valeur de H dans un canal et B′ la valeur du champ dans une fente.

Traduisons, en langage mathématique, la condition que le flux est nul à travers une surface fermée, nous écrivons

$$\int B'_\nu \, dS = 0.$$

B'_ν étant la composante de B′ normale à la surface.

2° Puisque nous ne modifions le champ qu'infiniment peu, quand nous enlevons de l'aimant une quantité de matière infiniment petite, nous pouvons imaginer que nous ayons tracé un canal infiniment délié dans le volume U autour d'une ligne L, de façon à le traverser depuis un point A de sa surface jusqu'à un point B ; on peut relier A

Digitized by Google

à B par un chemin L' dans le milieu U'. L et L' forment un circuit fermé sur lui-même; le circuit peut d'ailleurs se réduire à l'une ou à l'autre de ces lignes seulement. Nous vidons le canal de la matière magnétique qui le remplit et nous supposons que la substance du milieu U' y pénètre et s'y prolonge. Soit H'_s la projection de l'intensité du champ suivant la tangente au circuit qui forme la ligne d'intégration, soit ds l'élément de la ligne d'intégration; on aura

$$\int H'_s \, ds = 0.$$

1° *Application au tétraèdre élémentaire.* — Séparons du volume U le volume (u_1) d'un tétraèdre élémentaire dont trois faces sont parallèles aux plans coordonnés, la troisième étant perpendiculaire à la direction ν. Les quatre faces sont des feuillets remplis de la substance du milieu U'.

Appelons S_1, S_2, S_3 les faces perpendiculaires aux axes Ox, Oy, Oz et S la face oblique. Écrivons $\int B'_\nu dS = 0$ pour la surface qui contient le volume (U_1) du tétraèdre à son intérieur.

Appelons a ce que devient B'_ν quand dS devient perpendiculaire à Ox, b ce que devient B'_ν quand dS devient perpendiculaire à Oy, c ce que devient B'_ν quand dS devient perpendiculaire à Oz. On aura

$$a S_1 + b S_2 + c S_3 = B'_\nu S.$$

Mais si les cosinus directeurs de la direction ν sont l, m, n, cette équation peut s'écrire

$$B'_\nu = la + mb + nc.$$

Donc B'_ν est la projection sur la direction ν d'un vecteur B qui a pour composantes a, b, c. Par conséquent, la formule $\int B'_\nu dS = 0$ appliquée au parallélépipède élémentaire devient

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0.$$

Dans le langage du calcul vectoriel, on écrira

$$\int B'_\nu \, dS = \int B_\nu \, dS = \int \operatorname{div} B \, d\varpi.$$

Digitized by Google

D'où

$$\operatorname{div} B = 0.$$

2° *Principe des chemins sinueux.* — Traçons dans le volume U un canal PQ dans une direction quelconque; appelons ds la longueur PQ et soient dx, dy, dz ses composantes suivant les axes. Traçons maintenant un chemin sinueux pour aller de P en Q, le premier élément sera parallèle à Ox et égal à dx, le second sera parallèle à Oy et égal à dy, le troisième sera parallèle à Oz et égal à dz. Alors ds d'une part et dx, dy, dz d'autre part constituent un chemin fermé le long duquel un canal est tracé qu'on suppose rempli de la substance du milieu U'. Écrivons pour ce chemin l'équation $\int H'_s\,ds = 0$. Soient α, β, γ ce que devient H'_s quand le chemin ds devient parallèle respectivement à Ox, Oy, Oz. On aura

$$\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz = H'_s\,ds.$$

Et en appliquant cette équation successivement aux contours de rectangles parallèles aux axes, il viendra

$$\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y} = 0, \qquad \ldots.$$

Dans le langage vectoriel, on écrira

$$\int H'_s\,ds = \int H_s\,ds,$$

H étant le vecteur dont les composantes sont α, β, γ, et l'équation $\int H_s\,ds = 0$ donnera

$$\operatorname{rot} H = 0.$$

Distribution de masses fictives agissant en raison inverse du carré de la distance. — 1° Nous avons établi, qu'à l'extérieur de l'aimant, nous avions l'existence simultanée de ces deux lois : le vecteur H est solénoïdal; le vecteur H est irrotationnel.

Je vais montrer qu'on peut rendre compte de cette distribution en la supposant due à une répartition sur la surface S de masses agissant suivant la loi de Newton.

Cherchons, en effet, les masses qui, au point de vue de l'application de la formule de Vaschy, interviennent pour la production du champ dans le volume U'. Ce champ est compris entre la surface S et une

Digitized by Google

surface S′ située à l'infini ; sur celle-ci, le champ est nul et l'on n'a pas à s'en occuper. Dans le volume U′, nous avons à considérer les masses μ et ρ, mais, d'après les deux lois rappelées, on a $\mu = 0$, $\rho = 0$.

Mais, sur la surface S, nous avons les masses σ et les masses τ. Les premières agissent suivant la loi de Newton. Montrons que les masses τ peuvent être remplacées par d'autres masses agissant suivant la loi de Newton et non plus, comme les masses vectorielles, suivant la loi de Laplace. De plus, ces masses nouvelles pourront, si l'on veut, être considérées comme réparties sur la surface S elle-même.

Traçons à la surface de S les courbes qui sont en chaque point tangentes au vecteur τ ; considérons deux de ces courbes l_1 et l_2 infiniment voisines; entre elles le flux du vecteur τ se conserve, ainsi que nous l'avons démontré antérieurement, lorsque nous avons établi que le flux du vecteur τ à travers une courbe fermée quelconque tracée à la surface de S se réduit à zéro.

Considérons alors l'intégrale

$$I = \int \left(\tau_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \tau_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dS$$

étendue à la bande qui est comprise entre les courbes l_1 et l_2. Cette bande doit être fermée sur elle-même. On peut désigner par $ds(dx, dy, dz)$ l'élément de longueur de cette bande, pris soit sur l_1, soit sur l_2, puisque ces courbes sont infiniment voisines. On aura alors

$$\frac{\tau_x}{dx} = \frac{\tau_y}{dy} = \frac{\tau_z}{dz} = \frac{\tau}{ds}.$$

Appelons δs la largeur de la bande. L'élément de surface dS sera égal à $ds\,\delta s$. On sait, d'autre part, que le flux se conserve. Par conséquent, on a

$$\tau\,\delta s = \text{const.}$$

le long de la bande. Il vient donc, en faisant sortir $\tau\,\delta s$ du signe d'intégration,

$$I = \tau\,\delta s \int \left(dz \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - dy \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right).$$

Appliquons à cette intégrale de ligne la formule de Stokes, qui sert à transformer une intégrale de ligne en une intégrale de surface. Concevons donc une surface quelconque bordée par le contour l_1.

Digitized by Google

On pourra supposer cette surface appliquée sur la surface S elle-même, si l'on veut. L'intégrale I prend la forme

$$I = \tau\,\delta s \int (lA + mB + nC)\,dS,$$

l, m, n étant les cosinus directeurs de la normale à l'élément dS et l'on a

$$A = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right),$$

$$B = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y},$$

$$C = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}.$$

Or, on a

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} = 0.$$

Donc

$$A = -\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}$$

est égal à $\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx^2}$. D'où

$$I = \tau\,\delta s \int \left(l\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + m\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y} + n\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z} \right) dS.$$

L'intégrale I se rapporte au point $P(\alpha, \beta, \gamma)$, qui est l'origine des rayons vecteurs r allant aux diverses masses du champ. Dans ces conditions, on a d'une façon générale

$$\frac{\partial}{\partial x} f(r) = -\frac{\partial}{\partial \alpha} f(r),$$

puisque r est une fonction de $x - \alpha$. Et, par suite, il restera

$$I = -\tau\,\delta s \frac{\partial}{\partial \alpha} \int \left(l\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + m\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + n\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dS.$$

Nous avons donc la dérivée du potentiel d'une couche double constituée par des masses agissant suivant la loi de Newton.

Digitized by Google

Comme toute la surface S peut être décomposée en bandes par des filets analogues aux filets l_1, l_2 que nous venons de considérer en particulier, on voit que l'intensité du champ peut, en résumé, être attribuée exclusivement à des masses agissant suivant la loi de Newton.

2° On peut montrer qu'inversement l'intensité du champ peut être attribuée exclusivement à des masses agissant suivant la loi de Laplace.

Considérons, en effet, les masses σ à la surface de S. Nous allons les remplacer par des masses vectorielles. Soit dS l'élément de surface sur lequel se trouve répartie la masse σdS. Du contour de cet élément dS partent des lignes de flux qui forment un tube ou solénoïde le long duquel le flux se conserve. Comme la quantité totale des masses est égale à zéro, il doit y avoir quelque part sur la surface S un autre élément dS′ où aboutit un flux $\sigma' d$S′ égal au flux partant de l'élément dS. On atteindra cet élément dS′ en suivant le tube de flux partant de dS toutes les fois que ce tube ne se prolongera pas jusqu'à l'infini.

On peut aussi imaginer que l'intérieur de la surface S, autrement dit le volume U′, est vidé de toute matière et que le champ qu'on y envisage soit celui qui est créé exclusivement par les masses σ. Alors dans ce champ le tube de flux partant de dS aboutira à un autre élément dS′ de la surface qui enveloppe U′. Cette surface-enveloppe n'est point une surface équipotentielle pour les masses σ, mais peu importe; le tube de flux considéré n'agit que par les masses $+\sigma d$S et $-\sigma d$S $=\sigma' d$S′ placées à ses extrémités. On peut les supposer réparties, si l'on veut, à ces extrémités, sur deux sections droites, qui sont des surfaces équipotentielles du champ considéré. Qu'on se reporte alors au paragraphe intitulé *Équivalence des courants et des aimants* et l'on verra aussitôt que les masses newtoniennes réparties sur les bases sont équivalentes à des masses laplaciennes convenablement réparties sur la surface latérale. Ce sont ces masses vectorielles laplaciennes qui figurent les courants.

HYPOTHÈSES DE COULOMB ET D'AMPÈRE.

Certains physiciens, Coulomb et Poisson, supposent que les phénomènes du magnétisme sont dus à des molécules chargées d'un

Digitized by Google

fluide binaire spécial, fluide boréal et fluide austral. Ampère imagine que les molécules sont le siège de courants particulaires.

Au point de vue mathématique, les deux conceptions sont équivalentes.

Au point de vue physique de l'énergétique, la première hypothèse fait regarder l'énergie du champ magnétique comme une énergie potentielle. Au contraire, les masses laplaciennes représentent, dans la seconde hypothèse des courants, dans lesquels on voit quelque chose de progressif, un flux d'électrons en mouvement, et par là on arrive à l'idée que l'énergie du champ magnétique doit, en ce qui concerne la possibilité d'une explication mécanique des phénomènes, se comporter comme une énergie cinétique.

S'il s'agit de l'action qui se manifeste à l'extérieur de la surface S, les deux hypothèses ne peuvent être éprouvées par un *experimentum crucis*.

Examinons donc l'intérieur de la surface S : là aussi, il est à remarquer que les lignes-canaux que nous y pouvons tracer ne peuvent pas passer à l'intérieur d'un courant particulaire ; de même, les coupures par des feuillets ou diaphragmes que nous pouvons y pratiquer ne peuvent séparer l'un de l'autre les deux pôles d'un aimant particulaire.

Moment magnétique d'un aimant très petit, envisagé au point de vue de l'action exercée. — Nous avons vu qu'un petit aimant est caractérisé au point de vue de l'action qu'il subit par un axe magnétique et par un moment magnétique.

De même, les expériences de Coulomb et les expériences de Gauss nous montrent qu'au point de vue des actions qu'il exerce, un petit aimant n'intervient que par un moment magnétique $\mathfrak{M}$, dirigé suivant l'axe magnétique tel qu'il est défini déjà par l'action subie. Si donc, aux mêmes points N, S, on place des masses magnétiques fictives $+m$ et $-m$, de façon que le produit lm soit égal à $\mathfrak{M}$, on aura constitué un aimant fictif équivalent au point de vue de l'action exercée.

Cela posé, nous voulons montrer que les quantités q et m définies pour un même aimant, suivant qu'il subit ou qu'il exerce l'action, sont égales l'une à l'autre, et, d'autre part, que les actions réciproques entre ces masses fictives suffisent à expliquer l'action réciproque de

Digitized by Google

deux petits aimants l'un sur l'autre. Soient donc deux petits aimants NS et N'S' très éloignés l'un de l'autre; le premier est caractérisé par $\pm m$, $\pm q$ et le second par $\pm m'$, $\pm q'$. Indépendamment des actions en raison inverse du carré de la distance qui agissent entre ces masses et qui donnent lieu aux couples observés en rendant fixes par exemple les points N et N' de chacune de ces aiguilles, il peut y avoir à considérer deux forces F, F' appliquées respectivement en N et N'.

1° *Application du principe de l'égalité de l'action et de la réaction.* — On aura, en vertu de l'égalité des couples, autour de la droite NN',

$$\frac{m}{q} = \frac{m'}{q'} = \frac{1}{K},$$

le coefficient K ne dépendant que du milieu dans lequel sont plongés les aimants. On aura de même, en ce qui concerne les forces résultantes,

$$\overline{F} + \overline{F'} = 0,$$

et la direction commune est celle de NN'.

2° *Application du principe que le système des deux aimants est un système conservatif.* — Si l'on déplace l'aimant N'S' de façon à le ramener à sa position d'équilibre, on aura : travail de $F' = 0$. Le déplacement consistant à faire changer l'orientation de l'aimant N'S' en laissant N' fixe, puis à lui donner une petite translation, à lui redonner alors son orientation primitive et à le ramener à son point de départ, montre que F' ne saurait dépendre de l'orientation.

Mais alors, si les aimants sont très éloignés, je ne changerai pas la force F' en tournant l'aimant NS bout pour bout, et pourtant, l'action F' devrait changer de signe. On a donc $F = F' = 0$.

Le détail de ces démonstrations se trouve dans la *Théorie de l'Électricité*, de Vaschy.

THÉORIE DU MAGNÉTISME DE SIR W. THOMSON.

On suppose (*fig.* 44) que chaque élément de volume $d\varpi$ est équivalent à un petit système $(-m, +m)$ de masses fictives placées en

Digitized by Google

deux points M et M′ de l'élément. Ces masses obéissent à la loi bien connue de Coulomb

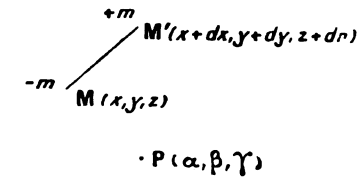
$$f = \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Le potentiel qui, en un point $P(\alpha, \beta, \gamma)$, est dû à une masse m_1 placée au point (x, y, z) est

$$V = \frac{m_1}{r}, \qquad r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2.$$

Si donc, en un point P, le potentiel dû à la masse $+m_1$ placée en

Fig. 44.



M $(x, y. z)$ est V, le potentiel dû à la masse $+m_1$ placée en M′ $(x+dx, y+dy, z+dz)$ est

$$V + dV = V + m_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dx + m_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dy + m_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} dz,$$

et le potentiel au point P dû à l'ensemble des deux masses $-m_1$, $+m_1$ placées respectivement en M et M′ est

$$(V + dV) - V = dV = m_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dx + m_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dy + m_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} dz.$$

Soient λ, μ, ν les cosinus directeurs de $MM' = ds$, on a

$$dx = \lambda\, ds, \qquad dy = \mu\, ds, \qquad dz = \nu\, ds.$$

Posons donc

$$m_1\, ds = I\, d\varpi; \qquad \lambda I = A, \qquad \mu I = B, \qquad \nu I = C;$$

il viendra, comme potentiel dû à l'élément $d\varpi$,

$$\left(A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + C \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\varpi.$$

Digitized by Google

Si nous appelons (l, m, n) les cosinus directeurs de la normale à la surface de l'aimant dirigée vers le milieu qui entoure l'aimant, l'aimant tout entier donnera lieu au potentiel

$$V = \int_U \left(A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + C \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\varpi$$

ou

$$V = \int_S (lA + mB + nC) \frac{dS}{r} - \int_U \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) \frac{d\varpi}{r}.$$

C'est ce qu'on peut écrire

$$V = \int \sigma \frac{dS}{r} + \int \rho \frac{d\varpi}{r},$$

en posant

$$\sigma = lA + mB + nC,$$
$$\rho = -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right).$$

σ et ρ étant les densités superficielle et de volume fictives équivalentes à l'aimant; A, B, C sont les composantes du vecteur I qu'on appelle *intensité d'aimantation*.

En notation vectorielle, on a

$$\sigma = (\nu_e I),$$
$$\rho = -\operatorname{div} I,$$

en appelant ν_e la normale à l'aimant dirigée vers l'extérieur de l'aimant; il est intéressant de remarquer qu'on a bien

$$\int \sigma \, dS + \int \rho \, d\varpi = 0,$$

c'est-à-dire que la somme totale du magnétisme est égale à zéro. On a, en effet,

$$\int (\nu_e I) \, dS = \int \operatorname{div} I \, d\varpi,$$

la première intégrale se rapportant à la surface de l'aimant, la seconde à son volume.

A l'intérieur de l'aimant, on ne peut faire de détermination expérimentale qu'à la condition d'y pratiquer une cavité, mais la force observée dépend de la forme de cette cavité. Alors, on considère principalement les deux cas particuliers suivants :

Digitized by Google

1° La cavité est un cylindre de révolution infiniment délié dont l'axe est parallèle à I et qui est terminé par deux bases normales à l'axe. Cette cavité est assez petite pour que I soit constant en grandeur et en direction. On observe dans cette cavité une force H de composantes α, β, γ. Nous avons à appliquer la formule

$$V = \int \sigma \frac{dS}{r} + \int \rho \frac{d\varpi}{r},$$

en tenant compte de la surface de la cavité. Mais nous remarquerons que les bases donnent lieu aux termes $I\frac{dS}{r}$ et $-I\frac{dS}{r}$ qui sont négligeables si le cylindre est infiniment délié; la surface latérale ne donne aucun terme, puisque d'après l'orientation choisie de l'axe de révolution, on a

$$lA + mB + nC = 0.$$

Si maintenant nous faisons tendre vers zéro la cavité, la limite de V ne sera autre que

$$\int_S \sigma \frac{dS}{r} + \int_U \rho \frac{d\varpi}{r},$$

l'intégrale de volume étant étendue à tout l'aimant et l'intégrale de surface à toute sa surface extérieure, celle de la cavité ne donnant aucun supplément.

Remarquons que le raisonnement subsiste si à V on ajoute le potentiel $\Sigma \frac{m}{r}$ dû à des masses extérieures. Si donc, la force due aux masses extérieures du champ et à celles de l'aimant a pour composantes

$$-\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad -\frac{\partial V}{\partial z},$$

les composantes α, β, γ de la force H observée au centre du cylindre infiniment délié seront données par

$$\alpha = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \beta = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad \gamma = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

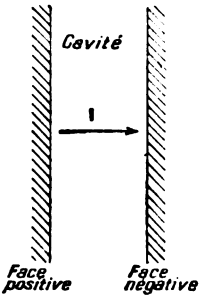
2° La cavité a la forme d'un disque infiniment aplati normal à I (*fig.* 45). Dans ce cas, appliquons la formule

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = -\int \sigma\, dS \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \int \rho\, d\varpi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}$$

Digitized by Google

étendue au volume de tous les aimants et à toutes leurs surfaces, y compris celle de la cavité, l'axe des x étant pris suivant I. Le terme

Fig. 45.



relatif à la surface latérale de la cavité sera égal à zéro, parce que

$$\sigma = l\mathrm{A} + m\mathrm{B} + n\mathrm{C} = 0.$$

La valeur de σ relative aux bases sera égale à I et la force provenant de ce terme sera $4\pi\mathrm{I}$. Si donc V s'applique au volume et à la surface extérieure de l'aimant considéré, la force $\mathfrak{B}$ que nous devons observer au centre du disque sera

$$\overline{\mathfrak{B}} = \overline{\mathrm{H}} + 4\pi\overline{\mathrm{I}},$$

et ses composantes seront

$$\begin{aligned} a &= \alpha + 4\pi\mathrm{A}, \\ b &= \beta + 4\pi\mathrm{B}, \\ c &= \gamma + 4\pi\mathrm{C}. \end{aligned}$$

Il résulte des valeurs trouvées ci-dessus pour α, β, γ qu'on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial\gamma}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Il résulte également des valeurs trouvées pour a, b, c qu'on a

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0.$$

Digitized by Google

En effet,

$$\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial c}{\partial z}=\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial \beta}{\partial y}+\frac{\partial \gamma}{\partial z}+4\pi\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right).$$

Or

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial \beta}{\partial y}+\frac{\partial \gamma}{\partial z}=-\Delta V$$

et

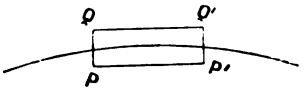
$$\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}=-\rho,$$

et, en vertu de la relation de Poisson, $\Delta V+4\pi\rho=0$, on voit que

$$\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial c}{\partial z}=0.$$

Nous terminerons par une remarque sur la discontinuité des fonctions α, β, γ. Soient (*fig.* 46) PP′ et QQ′ deux éléments de surface

Fig. 46.



parallèles et égaux infiniment voisins, situés de part et d'autre de la surface de l'aimant. On a

$$\int\left(\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial c}{\partial z}\right)d\varpi+\int(la+mb+nc)\,dS=0.$$

La surface latérale qui réunit les deux contours de PP′ et QQ′ donne dans cette équation un terme négligeable. Il en résulte que

$$(la+mb+nc)_{PP'}=(la+mb+nc)_{QQ'}.$$

Donc la quantité $la+mb+nc$ est continue. On a d'une manière générale

$$l\alpha+m\beta+n\gamma=la+mb+nc+4\pi(lA+mB+nC).$$

Donc, la discontinuité de $l\alpha+m\beta+n\gamma$ est égale à la somme des discontinuités de $la+mb+nc$ et de $4\pi(lA+mB+nC)$. Mais $la+mb+nc$ est continu à la surface et la discontinuité du second terme est $4\pi(lA+mB+nC)$, puisque, à l'extérieur de l'aimant, on a $A=B=C=0$. Donc, la discontinuité normale du vecteur H est

Digitized by Google

égale à

$$4\pi(lA + mB + nC),$$

c'est-à-dire à 4π fois la projection du vecteur I sur la normale à la surface.

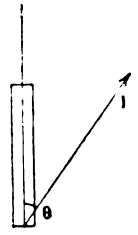
Quant à la composante tangentielle du vecteur H (α, β, γ), elle est continue, parce que les surfaces V = const. se raccordent sur la surface de l'aimant. Si, en effet, on écrit que

$$\int (\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz) = 0$$

le long du contour formé par deux éléments de ligne PP′ et QQ′ parallèles et égaux, infiniment voisins, de part et d'autre de la surface de séparation, PQ et P′Q′ étant infiniment petits par rapport à PP′ et QQ′, on voit que $H_t ds - H'_t ds = 0$. Donc, les composantes tangentielles H_t et H'_t sont égales de part et d'autre de la surface. On pourrait, au point de vue logique, admettre une différence constante entre les potentiels, mais on ne l'observe pas; les surfaces équipotentielles se raccordent.

Considérons maintenant (*fig.* 47) une cavité cylindrique infiniment déliée faisant un angle θ avec l'intensité d'aimantation I; alors I

Fig. 47.



aura deux composantes : $I\cos\theta$ suivant l'axe et $I\sin\theta$ dans le sens perpendiculaire. La première, $I\cos\theta$, ne donnera aucune action; quant à l'aimantation superficielle latérale due à $I\sin\theta$, elle donnera lieu, par raison de symétrie, à une action normale à l'axe du cylindre. Soient α', β', γ' les composantes de la force observée, on aura

$$l\alpha' + m\beta' + n\gamma' = l\alpha + m\beta + n\gamma,$$

l, m, n étant les cosinus directeurs de l'axe du cylindre.

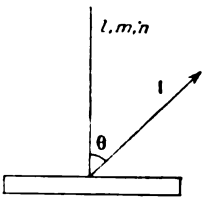
Digitized by Google

Par suite, si l'on considère un canal infiniment délié pratiqué dans la masse de l'aimant et se fermant sur lui-même, on aura, le long de ce circuit,

$$\int (\alpha' dx + \beta' dy + \gamma' dz) = 0.$$

Considérons de même (*fig.* 48) une cavité en forme de disque infiniment aplati, la normale au disque faisant un angle θ avec l'intensité

Fig. 48.



d'aimantation; alors I aura deux composantes : $I\cos\theta$ suivant cette normale, $I\sin\theta$ dans le sens perpendiculaire. La seconde, $I\sin\theta$, donnera lieu à une aimantation sur les parties latérales et son action pourra être négligée. La première, $I\cos\theta$, donnera une action suivant la normale égale à $4\pi I\cos\theta$ et l'on aura

$$la' + mb' + nc' = l\alpha + m\beta + n\gamma + 4\pi I\cos\theta;$$

mais on a

$$I\cos\theta = lA + mB + nC,$$

donc

$$la' + mb' + nc' = la + mb + nc,$$

et, par suite, si l'on considère une coupure infiniment étroite pratiquée dans la masse de l'aimant et formant un feuillet fermé sur lui-même, on aura, le long de cette surface,

$$\int (la' + mb' + nc')\,dS = 0.$$

Nous sommes donc partis d'une conception *a priori* des aimants et nous en avons déduit les deux propriétés suivantes :

1° Le travail de la force magnétique le long d'un canal infiniment délié et fermé sur lui-même est nul;

2° Le flux de force à travers une surface fermée est nul.

Digitized by Google

Et ces deux propriétés sont au moins, théoriquement, vérifiables par expérience.

Nous pourrions inversement prendre ces deux propositions comme point de départ pour arriver, en suivant la marche contraire, à la conception de l'intensité d'aimantation en un point. Nous admettrions alors, comme un résultat d'expériences faites dans de petites coupures, les résultats suivants :

La composante normale $la' + mb' + nc'$ de la force magnétique dans une coupure est la projection $la + mb + nc$ d'un certain vecteur $\overline{\mathfrak{B}}$ bien défini en chaque point.

De même, la composante tangentielle de la force magnétique suivant un canal infiniment délié est égale à la composante suivant l'axe de ce canal d'un certain vecteur $\overline{\mathrm{H}}$ bien défini en chaque point. Et nous poserions

$$\overline{\mathfrak{B}} = \overline{\mathrm{H}} + 4\pi\overline{\mathrm{I}}.$$

Alors I serait un vecteur défini en fonction de $\overline{\mathfrak{B}}$ et de $\overline{\mathrm{H}}$. Nous l'appellerons l'*intensité d'aimantation* parce qu'il est bien défini en chaque point, c'est-à-dire indépendant des diverses coupures ou des divers canaux qui ont servi aux expériences; de plus, on considérerait comme un résultat d'expérience que lorsque le champ extérieur varie de façon à faire varier $\mathfrak{B}$ et H, I cependant resterait constant, ce qui est la caractéristique d'un aimant permanent.

Considérons alors le vecteur H, il dérive d'un potentiel, puisque l'on a

$$\int (\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz) = 0,$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$\frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial y} = 0, \qquad \ldots.$$

D'autre part, on a

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z} = -4\pi\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial z}\right),$$

puisque de

$$\int (la + mb + nc)\, d\mathrm{S} = 0$$

on déduit

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0.$$

Digitized by Google

Donc, d'après le théorème de Vaschy, le vecteur H peut être censé dû à un ensemble de masses vectorielles ou scalaires de volume ou de surface. Les masses vectorielles de volume sont nulles, puisque H dérive d'un potentiel; les masses de volume sont

$$4\pi\rho = \operatorname{div} H = \operatorname{div} B - 4\pi \operatorname{div} I.$$

Or, on a

$$\operatorname{div} B = 0,$$

d'où

$$\rho = -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right).$$

Déterminons maintenant les masses superficielles; pour cela, il suffit de trouver les discontinuités normale et tangentielle du vecteur H. Le vecteur H dérivant d'un potentiel, la discontinuité tangentielle est nulle, et par suite également la densité de masse vectorielle superficielle. Quant à la discontinuité normale, comme il n'a pas de discontinuité normale, elle est égale à

$$(\nu_e H_e) + (\nu_i H_i), \qquad \text{en notation vectorielle,}$$

ν_e étant le vecteur unité suivant la normale extérieure à l'aimant, ν_i le vecteur unité suivant la normale intérieure; H_e étant le vecteur H à l'extérieur de l'aimant, H_i ce même vecteur à l'intérieur de l'aimant, mais en des points infiniment voisins de la surface. On peut écrire

$$4\pi\sigma = (\nu_e(H_e - H_i)) = (\nu_e(4\pi I_i - 4\pi I_e)),$$

I_i et I_e étant les valeurs de l'intensité d'aimantation I à l'intérieur et à l'extérieur de l'aimant; mais on a tout simplement

$$I_e = 0 \qquad \text{et} \qquad I_i = I,$$

d'où

$$\sigma = (\nu_e I)$$

ou

$$\sigma = lA + mB + nC,$$

l, m, n étant les composantes de ν_e.

Telle est, rapidement esquissée, la marche inverse qu'on pourrait adopter pour arriver à la constitution des aimants, car on passerait aussitôt de la formule

$$V = +\int \frac{lA + mB + nC}{r}\, dS - \int \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)\frac{d\varpi}{r}$$

Digitized by Google

à la formule initiale

$$V = \int \left(A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + C \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\varpi,$$

qui nous montrerait que l'intensité d'aimantation I est telle que $I d\varpi$ est le moment magnétique de l'élément $d\varpi$.

Magnétisme induit. — Nous avons établi les formules

$$a = \alpha + 4\pi A, \quad \ldots.$$

Supposons que le corps ne soit pas un aimant permanent, alors I doit dépendre de H; Poisson pose

$$A = \varkappa\alpha, \qquad B = \varkappa\beta, \qquad C = \varkappa\gamma,$$

$\varkappa$ étant un coefficient qu'on peut supposer constant pour les corps faiblement magnétiques; il vient alors

$$a = \mu\alpha, \qquad b = \mu\beta, \qquad c = \mu\gamma,$$

en posant $\mu = 1 + 4\pi\varkappa$. Le coefficient μ est appelé *perméabilité magnétique*.

Si nous supposons que les deux propriétés fondamentales subsistent, quel que soit le milieu magnétique, nous pourrons en déduire que la composante normale de l'induction est continue à la surface de séparation de deux milieux et que la composante tangentielle de la force magnétique est également continue

$$\mu H_n = \mu' H'_n,$$
$$H_t = H'_t.$$

Il suffit pour le démontrer d'exprimer, d'une part, que le flux de force à travers un élément de volume enfermé par deux éléments de surface égaux et parallèles, infiniment voisins de part et d'autre de la surface de séparation, est nul, et, d'autre part, que le travail de la force magnétique le long d'un chemin d'intégration constitué par deux éléments de ligne égaux et parallèles, infiniment voisins de part et d'autre de la surface de séparation, est nul. Mais alors, la loi de distribution du vecteur (α, β, γ) est la même que celle du vecteur (X, Y, Z) du champ électrique à la condition de remplacer le milieu de perméabilité μ par le milieu électrique de pouvoir inducteur K.

Digitized by Google

X, Y, Z sont liés aux masses fictives des milieux diélectriques polarisés, par les mêmes relations que α, β, γ aux masses fictives des milieux magnétiques. Comme on a la relation

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0,$$

le vecteur $\mathfrak{B}$ (composantes a, b, c) satisfait à la même condition de continuité que les courants. Si l'on considère un circuit fermé de substance magnétique dans un milieu non magnétique, la valeur de μ dans la substance magnétique pourra être assez grande par rapport à μ', perméabilité du milieu non magnétique ($\mu' = 1$), pour qu'on puisse négliger la dispersion latérale du flux d'induction $\mathfrak{B}$, et le flux d'induction circulera comme un courant.

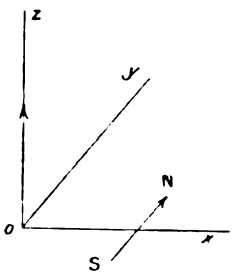
C'est ce qui justifie les calculs, bien connus des industriels, de la résistance ou réluctance du circuit magnétique.

ÉLECTROMAGNÉTISME.

Explorons le champ magnétique créé par un courant. Supposons, ce qui est le cas de l'expérience de Biot et Savart, qu'un courant I soit dirigé verticalement de bas en haut et qu'on suspende dans le voisinage une aiguille aimantée.

Si nous appelons H la composante horizontale de l'intensité du champ terrestre, le couple directeur terrestre sera $\gamma H \sin\theta$, γ étant le moment magnétique de l'aiguille et θ l'angle d'écart avec le méridien

Fig. 49.



magnétique. Il est donc facile d'en tenir compte. Soient Oz (*fig.* 49) l'axe du courant; zOy le plan du méridien magnétique; $x = r$,

Digitized by Google

$y = 0$, $z = 0$ les coordonnées du centre de gravité de l'aiguille. Soit h l'intensité du champ magnétique dû au courant ; il est parallèle à Oy et le couple directeur est égal à $\gamma h \sin\theta$. Il s'agit de déterminer cette intensité du champ h. A cet effet, faisons osciller l'aiguille ; l'équation du mouvement est

$$m\,K^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = \gamma \sin\theta\,(H + h),$$

et la fréquence N des oscillations infiniment petites est donnée par l'équation

$$4\pi^2 N^2 = \frac{\gamma(H + h)}{m\,K^2}.$$

Interrompons le courant ; la fréquence des oscillations devient N′ telle que

$$4\pi^2 N'^2 = \frac{\gamma h}{m\,K^2};$$

d'où

$$4\pi^2(N^2 - N'^2) = \frac{\gamma h}{m\,K^2}$$

et, par suite,

$$\frac{N^2 - N'^2}{N'^2} = \frac{h}{H}.$$

L'expérience montre que

$$h = A\frac{I}{r}.$$

M. Joubin a répété l'expérience en explorant le champ à l'intérieur du conducteur, qui était alors constitué par un cylindre liquide contenu dans un tube de verre de rayon a ; il a obtenu

$$h = \frac{A}{a^2} Ir.$$

Admettons ces résultats d'expérience et appliquons le théorème de Vaschy à ce cas particulier. Il s'agit de rechercher quelles sont les masses newtoniennes et laplaciennes qui rendent compte de cette distribution.

Prenons des coordonnées cylindriques

$$x = r\cos\omega, \qquad y = r\sin\omega, \qquad z = z.$$

A l'extérieur du conducteur, h sera décomposable en trois compo-

Digitized by Google

santes

$$h_r = 0, \qquad h_\omega = AI\frac{1}{r}, \qquad h_z = 0.$$

1° Pour un contour fermé, on aura

$$\int (\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz)$$
$$= \int (h_r\, dr + h_\omega r\, d\omega + h_z dz) = AI \int \frac{1}{r} \times r\, d\omega = AI \int d\omega = 0,$$

à condition de ne pas embrasser l'axe des z. Cette propriété, appliquée à un contour élémentaire, montre que les masses vectorielles sont nulles.

2° Pour une surface fermée, on aura

$$\int (l\alpha + m\beta + n\gamma)\, dS = \int\int (h_r r\, d\omega\, dz + h_\omega\, dr\, dz + h_z r\, d\omega\, dr)$$
$$= AI \int\int \frac{dr\, dz}{r} = AI \int dz \int \frac{dr}{r} = 0.$$

Cette propriété, appliquée à un volume élémentaire $dx\, dy\, dz$, montre que les masses newtoniennes de volume sont nulles.

A l'intérieur du conducteur, h sera décomposable en trois composantes

$$h_r = 0, \qquad h_\omega = \frac{A}{a^2} Ir, \qquad h_z = 0.$$

1° Pour un contour fermé, on aura

$$\int (h_r\, dr + h_\omega r\, d\omega + h_z\, dz) = \int \frac{A}{a^2} Ir^2\, d\omega = \frac{2A}{a^2} IS,$$

S étant la projection sur le plan des xy de la surface embrassée par le contour

$$S = \frac{1}{2}\int r^2\, d\omega.$$

Cette propriété appliquée à un contour élémentaire montre qu'on a

$$\mu_x = 0, \qquad \mu_y = 0 \qquad \text{et} \qquad \mu = \mu_z = i\frac{A}{2},$$

en posant

$$i = \frac{I}{\pi a^2}.$$

Cette quantité i est la densité de la masse vectorielle I.

Digitized by Google

2° On aura pour une surface fermée

$$\int (h_r r\, d\omega\, dz + h_\omega\, dr\, dz + h_z r\, d\omega\, dr) = \int \frac{A}{a^2} I r\, dr\, dz = 0.$$

Donc

$$\varsigma = 0.$$

Quant aux masses superficielles σ et τ, elles sont nulles, parce que h n'éprouve pas de discontinuité à la surface du conducteur, car on a

$$\left(\frac{A}{a^2} I r\right)_{r=a} = \left(AI\frac{1}{r}\right)_{r=a},$$

donc il reste

$$\mu_z = \frac{A}{2}\frac{I}{\pi a^2} = \frac{A}{2} i.$$

Mais le coefficient A ne dépend ni de l'intensité du courant, ni de la nature du conducteur; on peut donc faire $A = 2$ et alors il vient

$$\mu_z = i \qquad \text{et} \qquad h = \frac{2I}{r} \qquad \text{(à l'extérieur du conducteur).}$$

D'une façon générale, l'équation $\mu = i$ peut s'écrire

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\beta}{\partial z} - \dfrac{\partial\gamma}{\partial y} = 4\pi p, \\ \dfrac{\partial\gamma}{\partial x} - \dfrac{\partial\alpha}{\partial z} = 4\pi q, \\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial y} - \dfrac{\partial\beta}{\partial x} = 4\pi r, \end{cases}$$

p, q, r étant les composantes de l'intensité du courant de conduction.

L'expérience de Biot et Savart a été expliquée par Laplace, en supposant que chaque élément de courant exerce en un point quelconque une action laplacienne.

D'après la formule de Vaschy, nous trouvons que, de (1), on peut déduire $d\varpi'$ ayant son centre de gravité en x', y', z'

$$\alpha = \int \left(q\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} - r\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} \right) d\varpi'$$

ou

$$H = \text{rot } A \qquad \text{avec} \qquad A = \int \frac{C}{r} d\varpi, \qquad \ldots,$$

C étant le courant (compos. p, q, r).

Digitized by Google

D'après la théorie de Vaschy, on part de l'observation des forces et l'on déduit l'endroit où se trouvent placées les masses qui, exerçant des actions à distance, donneraient la même distribution; mais ces masses peuvent n'être que fictives, si nous adoptons les idées de Maxwell qui repousse toute idée d'action à distance.

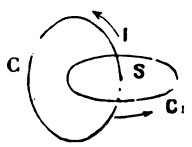
Les équations (1), qui lient la densité du courant en un point à la force magnétique observée en ce même point, sont les premières équations du champ électromagnétique. Maxwell fait alors une hypothèse fondamentale; c'est que le courant de déplacement

$$\frac{df}{dt},\quad \frac{dg}{dt},\quad \frac{dh}{dt},\qquad \left(f=\frac{KP}{4\pi},\ g=\frac{KQ}{4\pi},\ h=\frac{KR}{4\pi}\right)$$

agit sur l'aiguille aimantée tout comme le courant de conduction; voici comment on peut être conduit à cette hypothèse.

Mesure du courant par l'électromètre et mesure du courant par le galvanomètre. — 1° *Mesure du courant par le galvanomètre.* — Le potentiel du champ d'un courant n'est pas uniforme. Il le devient si l'on coupe le champ par un diaphragme ayant pour contour le courant linéaire considéré; la constante cyclique est égale à $4\pi I_c$. En effet, si je considère un circuit fermé C_1 (*fig.* 50)

Fig. 50.



embrassant une fois le courant et si S est une surface s'appuyant sur le contour C_1, j'ai

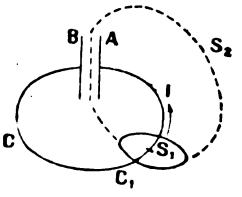
$$\begin{aligned}\int_{C_1}&\left(\alpha\,dx+\beta\,dy+\gamma\,dz\right)\\&=\int\left[l\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)+m\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)+n\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)\right]dS\\&=4\pi\int_S(lp+mq+nr)\,dS=4\pi I_c.\end{aligned}$$

Cela posé, appliquons ce résultat au courant I qui circule dans le

Digitized by Google

conducteur linéaire C (*fig.* 51) par lequel s'opère la décharge du condensateur à lames parallèles AB, de B vers A. Formons l'expres-

Fig. 51.



sion du travai de l'intensité du champ magnétique, le long d'un circuit C_1, embrassant une fois le circuit C dans le sens direct. La décharge est supposée assez lente pour qu'à chaque instant l'intensité soit la même en tous les points du circuit C. Alors on a

$$\int_{C_1} (\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz) = 4\pi \int_{S_1} (lp + mq + nr)\, dS = 4\pi I_c$$

p, q, r étant les composantes de la densité du courant de conduction qui traverse le diaphragme S_1 qui s'appuie sur C_1. Soit donc I_c le courant mesuré ainsi par l'action sur l'aimant.

2° *Mesure du courant par l'électromètre.* — Mais, d'autre part, l'expérience montre que le courant I_c, mesuré au moyen du galvanomètre par son action sur l'aiguille aimantée, est égal au courant qui est mesuré, comme nous avons appris à le faire lorsque nous avons défini la résistance, au moyen de l'électromètre. Ce courant, dans le cas de la décharge du condensateur, est égal, nous l'avons prouvé, en nous appuyant sur la loi de Joule et sur le principe de la conservation de l'énergie, à $-\frac{dQ}{dt}$, Q étant la quantité d'électricité qui charge le condensateur. Soit donc $-\frac{dQ}{dt}$ le courant mesuré ainsi par l'électromètre.

L'égalité

$$I_c = -\frac{dQ}{dt},$$

que nous obtenons ainsi par la comparaison des mesures faites à

Digitized by Google

l'électromètre et au galvanomètre, peut s'écrire

$$\int_{S_1} (lp + mq + nr)\, dS + \frac{d}{dt} \int_{S_2} \left(l' \frac{KE_x}{4\pi} + m' \frac{KE_y}{4\pi} + n' \frac{KE_z}{4\pi} \right) dS = 0,$$

la surface S_2 étant constituée par un diaphragme qui s'appuie sur le même contour C_1 que S_1 de façon à envelopper avec S_1 un volume U bien défini, mais qui passe entre les armatures du condensateur au lieu de couper le conducteur; l', m', n' sont les cosinus directeurs de la normale à la surface S_2; l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale à la surface S_1, la direction positive de ces normales étant comptée positivement dans les deux cas vers l'intérieur du volume U compris entre les deux surfaces S_1 et S_2. On aura donc également

$$\int_{C_1} (\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz) = \frac{d}{dt} \int_{S_2} \frac{KE_n}{4\pi} dS,$$

E_n étant la composante normale de l'intensité du champ électrique, comptée positivement dans le même sens que la composante normale du courant, lorsqu'on suppose que l'on déforme la surface S_2 pour l'appliquer sur S_1.

Si donc on suppose le circuit C_1 infiniment petit, on aura, en un point de la masse conductrice,

$$\frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial y} = 4\pi p, \qquad \ldots,$$

et en un point du diélectrique,

$$\frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial y} = 4\pi \frac{d\left(\frac{KE_x}{4\pi}\right)}{dt}, \qquad \ldots.$$

Les quantités $\frac{d\left(\frac{KE_x}{4\pi}\right)}{dt}$, $\frac{d\left(\frac{KE_y}{4\pi}\right)}{dt}$, $\frac{d\left(\frac{KE_z}{4\pi}\right)}{dt}$ sont les composantes du vecteur $\frac{d\left(\frac{KE}{4\pi}\right)}{dt}$ ou $\frac{dD}{dt}$ qu'on appelle le courant de déplacement, tandis que I_c (composantes p, q, r) est le courant dit de *conduction*. Quant à la quantité qui a pour composantes

$$p + \frac{d}{dt}\left(\frac{E_x}{4\pi}\right), \ldots,$$

Digitized by Google

ce serait le courant total C, dans un milieu doué à la fois de conductibilité et de pouvoir inducteur diélectrique.

Si nous supposons que les valeurs des quantités $\frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial y}$, et analogues en un point M (x, y, z) ne dépendent que des vecteurs C et H en ce point même, on sera amené à concevoir les équations

$$\frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial y} = 4\pi \frac{d\left(\frac{KE_x}{4\pi}\right)}{dt}, \qquad \ldots$$

comme s'appliquant toutes les fois que E_x, E_y, E_z subissent en ce point une variation avec le temps, sans que la présence d'un conducteur parcouru par un courant soit nécessaire à la valabilité de cette relation. La dissipation d'énergie qui peut résulter de cette variation de l'intensité du champ électrique s'effectue sous forme de chaleur dans le conducteur qui réunit les armatures d'un condenseur; mais, en l'absence d'un conducteur, elle pourrait également résulter d'un rayonnement vers l'espace infini.

Nous sommes ainsi amenés à admettre que, d'une façon générale, on peut poser

$$\frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial y} = K \frac{dE_x}{dt} + 4\pi p, \qquad \ldots$$

(axes de la géométrie analytique) et, dans les milieux conducteurs, on aura, en outre, d'après la loi d'Ohm, $p = cX$, ... Ces équations sont le premier groupe des équations du champ électrodynamique.

Équivalence des courants et des aimants. — Considérons le champ d'un vecteur H (composantes X, Y, Z). Supposons que l'on ait, dans une région (A) de l'espace où le vecteur (X, Y, Z) serait fini et continu, $\rho = 0$, $\mu = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Alors (X, Y, Z) dérive d'un potentiel; considérons (*fig.* 52) deux

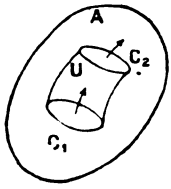
Digitized by Google

surfaces équipotentielles $V = V_1$ et $V = V_2$ et supposons $V_1 > V_2$ pour fixer les idées. Sur la surface $V = V_1$, traçons un contour fermé C_1 ; de ce contour, partent des lignes de flux

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

qui forment un tube découpant sur la surface $V = V_2$ un contour

Fig. 52.



fermé C_2. Les bases C_1, C_2 et la surface latérale du tube limitent un volume U. Supposons maintenant que dans toute la région de l'espace (A) nous ayons un autre champ de vecteur à considérer [vecteur h : composantes (α, β, γ)]. Ce vecteur serait défini comme suit. On aurait partout, en général,

$$\alpha = \beta = \gamma = 0,$$

sauf dans le volume U où l'on aurait

$$\alpha = X, \qquad \beta = Y, \qquad \gamma = Z.$$

Alors le vecteur (α, β, γ) serait fini et continu partout, sauf à la surface du volume U où sa discontinuité serait égale à H (X, Y, Z).

Appliquons alors le théorème de Vaschy au champ du vecteur h. Soient σ et ρ les densités des masses newtoniennes superficielle et de volume; τ et μ les densités des masses vectorielles de surface et de volume. On aura tout d'abord

$$\rho = \mu = 0;$$

sur la base C_1, on aura

$$4\pi\sigma_1 = h_1, \qquad \tau_1 = 0;$$

sur la base C_2, on aura

$$4\pi\sigma_2 = -h_2, \qquad \tau_2 = 0.$$

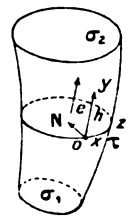
Digitized by Google

Sur la surface latérale on aura la masse vectorielle de surface dont les composantes sont :

$$4\pi\tau_x = n\mathrm{Y} - m\mathrm{Z},$$
$$4\pi\tau_y = l\mathrm{Z} - n\mathrm{X},$$
$$4\pi\tau_z = m\mathrm{X} - l\mathrm{Y},$$

l, m, n étant les cosinus directeurs de la normale N vers l'intérieur du volume U (*fig.* 53), et l'on voit que τ, h et N forment un système

Fig. 53.

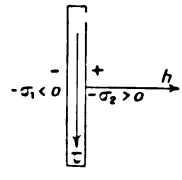


superposable à Ox, Oy, Oz. D'ailleurs on a $4\pi\tau = h$ en valeur absolue. De plus, comme h est tangent à la surface latérale, on a $\sigma = 0$. Donc, en un point extérieur au volume U, on a

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 0,$$

quand on suppose que les masses agissantes sont les masses newtoniennes σ_1 et σ_2 et les masses vectorielles τ. Donc, en un point exté-

Fig. 54.



rieur au volume U (*fig.* 54), le vecteur résultant de l'action des masses $-\sigma_1$ et $-\sigma_2$ est égal au vecteur résultant des masses vectorielles $+\tau$.

Supposons maintenant que les deux bases C_1 et C_2 soient infiniment voisines (*fig.* 55), on aura, en appelant dn l'élément de ligne de flux,

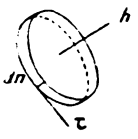
$$4\pi\sigma_1 = \frac{V_1 - V_2}{dn}, \qquad 4\pi\sigma_2 = -\frac{V_1 - V_2}{dn}, \qquad 4\pi\tau = \frac{V_1 - V_2}{dn},$$

Digitized by Google

dn étant compté positivement dans le sens de h, c'est-à-dire de V_1 vers V_2.

On voit que $\tau dn = \frac{V_1 - V_2}{4\pi}$ est constant tout le long de la surface latérale; c'est sur cette surface le flux du vecteur τ; si donc nous

Fig. 55.



considérons un courant de valeur $I_c = \frac{V_1 - V_2}{4\pi}$ circulant sur cette bande latérale, la densité i_c de ce courant en chaque point sera égale à τ.

L'action de ce courant sera donc égale à celle des masses $-\sigma_1$ et $-\sigma_2$ réparties sur les bases. L'ensemble de ces deux bases constitue ce qu'on appelle un *feuillet*. Le produit $\sigma_1 dn$ est appelé la *puissance du feuillet*, soit Φ; on a donc

$$\sigma_1 dn = \Phi = \frac{V_1 - V_2}{4\pi} = I_c.$$

C'est une quantité dirigée. La portion du feuillet qui correspond à l'élément de surface dS peut être considérée comme un aimant infiniment petit de moment $\sigma_1 dn\, dS = \Phi\, dS$, formé de deux masses élémentaires, l'une $+\sigma_1 dS = \frac{h\, dS}{4\pi}$ sur la base S_2, l'autre négative $-\sigma_1 dS = -\frac{h\, dS}{4\pi}$ sur la base S_1.

Le vecteur Φ est dirigé dans le sens de h. Le courant équivalent I_c est dirigé dans le sens de τ.

Tel est le principe de l'équivalence d'un courant et d'un feuillet magnétique. Si l'on considère un tube infiniment délié, nous pourrons le décomposer par une infinité de surfaces de niveau en une série de feuillets juxtaposés de même puissance. L'ensemble des courants équivalents constitue un solénoïde.

En résumé, l'intensité du champ magnétique, qui est due en un point P à un courant C, est égale à celle qui serait due au feuillet équivalent. Le point P est supposé en dehors du volume infiniment étroit occupé par le feuillet.

Digitized by Google

Potentiel d'un courant linéaire. — Mais le feuillet est un aimant dont le potentiel est donné par la formule générale

$$V = \int d\varpi \left(A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + C \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right)$$
$$= \int I \, d\varpi \left(l \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + m \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + n \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right).$$

On aura, pour cette application,

$$d\varpi = dn \, dS,$$
$$I \, d\varpi = \Phi \, dS,$$

ce qui donne

$$V = \int \Phi \, dS \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = - \Phi \int \frac{1}{r^2} dS \cos(dr \, dn) = - \Phi \omega,$$

ω étant l'angle solide sous lequel, du point P où l'on recherche le potentiel, on voit la face négative du feuillet.

L'intensité du champ magnétique, dû à un courant I_c, est donc dérivée d'un potentiel $V = - I_c \omega$, et ω est le flux entrant par la face négative du feuillet et qui serait dû à la force newtonienne $\frac{1}{r^2}$ répulsive, émanant de l'unité de masse placée au point P.

Par suite, le travail élémentaire que produira la force magnétique sur l'unité de pôle P, pour un déplacement élémentaire égal à δs serait, en appelant K′ le coefficient d'influence du milieu,

$$- K' \frac{\partial V}{\partial s} \delta s = K' I_c \delta \omega,$$

c'est-à-dire serait égal au produit de l'intensité par l'accroissement de l'angle solide considéré. Et cette propriété nous permettra de déterminer l'action exercée par un champ magnétique sur un élément de courant.

Application du principe de l'égalité entre l'action et la réaction. Action d'un pôle sur un élément de courant. — A cet effet, nous admettons que la force est appliquée à la matière, siège du courant. Puis, nous rendrons mobile, sur des glissières conductrices convenables, l'élément de courant considéré. Enfin, nous nous bornerons,

Digitized by Google

tout d'abord, à examiner le cas où le champ magnétique est dû sensiblement à un seul pôle magnétique P, l'autre pôle, de sens contraire, qui est inévitable, étant reculé à une distance infinie. Nous admettons, d'autre part, que le travail des forces en jeu ne dépend que du changement de position relative du pôle et du courant.

Nous allons préciser le problème qui est ici posé. Soit C le circuit linéaire parcouru par un courant I. Il agit sur un pôle P. Déplaçons le pôle P par une translation δs; le travail produit par la force magnétique agissant sur le pôle P est $\delta T = K' I \delta\omega$.

Cela posé, maintenons le pôle P fixe et donnons au courant un déplacement relatif identique à celui qui vient d'être considéré, on devra avoir encore $\delta T = K' I \delta\omega$. La quantité $\delta\omega$ est l'accroissement de l'angle solide sous lequel, du point P, on voit la face négative du feuillet que borde le courant I. Nous supposons que le travail est dû à des forces appliquées à chaque élément $I ds$ de courant. L'équation précédente sera vérifiée, si nous nous imposons la condition que le travail élémentaire sur chaque élément de courant, produit par la force électromagnétique, soit égal à I multiplié par K' et par l'accroissement de l'angle solide sous lequel on voit la face négative du feuillet pendant le déplacement de l'élément $I ds$ sur ses glissières. Cherchons à savoir quel sera, dans ce cas, l'expression de la force F.

La force mécanique F est décomposable en deux composantes : l'une F_t dans le plan Π de l'élément de courant et de la force magnétique; l'autre F_n suivant la normale à l'élément de courant et à la force magnétique. Mais, si l'élément se déplace dans le plan Π, il n'en résulte aucune variation de l'angle solide. Le travail de F_t est nul; donc la composante F_t est nulle. Nous appellerons F_x, F_y, F_z les composantes de F. Je dis que l'on a

$$\begin{aligned} F_x &= K' I(\beta\, dz - \gamma\, dy), \\ F_y &= K' I(\gamma\, dx - \alpha\, dz), \\ F_z &= K' I(\alpha\, dy - \beta\, dx), \end{aligned}$$

en appelant α, β, γ les composantes de l'intensité magnétique h et dx, dy, dz les composantes de l'élément ds de courant. En effet, on aura pour le travail élémentaire

$$\delta T = K' I \begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z,$$

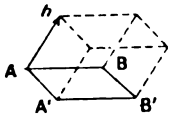
Digitized by Google

c'est-à-dire

$$\delta T = K' I \, ds \, \delta s h_n \sin(ds, \delta s),$$

avec le signe + si le vecteur h pénètre par la face négative du feuillet. Or $h_n \, ds \, \delta s \sin(ds, \delta s)$ représente le flux du vecteur h à travers l'élément de feuillet AB A'B' (*fig.* 56), c'est-à-dire $d\omega$ quand il n'y a qu'un pôle. D'ailleurs, les formules subsistent évidemment quand il

Fig. 56.



y a plusieurs pôles et plusieurs courants en présence, l'action sur l'élément de courant ne devant dépendre que de la valeur de h au point où est situé cet élément.

Application de la formule analytique qui exprime le principe de l'égalité de l'action et de la réaction. — Nous rappellerons que nous avons obtenu l'identité

$$2\int (X\rho + Y\mu_z - Z\mu_y)\, d\varpi + \int (X\sigma + Y\tau_z - Z\tau_y)\, dS = 0.$$

Or, si l'on suppose que X, Y, Z soient égaux aux composantes α, β, γ du champ magnétique, ρ sera la masse magnétique, μ sera l'intensité de la densité de courant; si l'on suppose la surface S reculée à l'infini, σ et τ, X, Y, Z s'y annulent et il reste

$$\int K' \alpha \rho \, d\varpi + \int K' (\beta \mu_x - \gamma \mu_y)\, d\varpi = 0.$$

Cette formule prouve que la résultante des forces qui agissent sur les masses ρ est égale et de signe contraire à la résultante des forces qui agissent sur les courants (masses vectorielles μ).

La résultante des actions des divers éléments d'un circuit fermé sur un pôle est appliquée à ce pôle. — Mais, d'autre part, nous admettons pour la force élémentaire qui agit sur un élément de courant qu'elle est appliquée à cet élément; il faut donc, réciproquement, que l'action exercée par l'élément de courant sur le pôle soit aussi

Digitized by Google

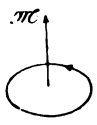
appliquée à l'élément, comme étant égale et de sens contraire à la première. Si on la transporte parallèlement à elle-même pour l'appliquer au pôle, il faut, pour ne pas changer les conditions d'équilibre, ajouter un couple. Cela posé, je dis que le couple résultant des couples dus à tous les éléments de courant est nul pour un circuit fermé.

Soient C le circuit considéré et P le pôle. La force qui agit sur l'élément de courant $I\,ds$ est, en faisant $K' = 1$ pour abréger l'écriture,

$$\begin{aligned} F_x &= I(\beta\,dz - \gamma\,dy), \\ F_y &= I(\gamma\,dx - \alpha\,dz), \\ F_z &= I(\alpha\,dy - \beta\,dx), \end{aligned}$$

et le couple qui agirait sur le pôle aurait pour composante sui-

Fig. 57.



vant Ox, par exemple, en comptant les moments comme positifs lorsqu'ils font tourner dans le sens de la figure (*fig.* 57),

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_x &= -yF_z + zF_y = -yI(\alpha\,dy - \beta\,dx) + zI(\gamma\,dx - \alpha\,dz) \\ &= I[dx(+\beta y + \gamma z) - \alpha y\,dy - \alpha z\,dz]. \end{aligned}$$

Or

$$\alpha = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = +\frac{1}{r^2}\frac{x}{r} = +\frac{x}{r^3}, \qquad \cdots \qquad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2);$$

d'où

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3} = \frac{1}{r}$$

et par suite

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_x &= I\left[+\frac{dx}{r} - \frac{x}{r^3}(x\,dx + y\,dy + z\,dz)\right] \\ &= I\left(\frac{dx}{r} + x\,d\frac{1}{r}\right) = I\,d\left(\frac{x}{r}\right). \end{aligned}$$

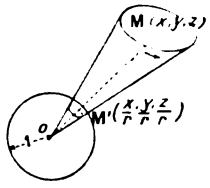
On a donc $\int d\left(\frac{x}{r}\right) = 0$ pour un circuit fermé, c'est-à-dire

$$\Sigma\,\mathfrak{M}_x = 0 \qquad \text{et aussi} \qquad \Sigma\,\mathfrak{M}_y = 0, \qquad \Sigma\,\mathfrak{M}_z = 0,$$

Digitized by Google

c'est-à-dire que le couple résultant est nul et l'action exercée par le courant fermé sur le pôle se réduit à une force appliquée à ce pôle (*fig.* 58).

Fig. 58.



Remarque. — Le point M' qui a pour coordonnées $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$ est le point où le rayon vecteur OM, qui joint l'origine au point M (x, y, z), perce la sphère de rayon 1 qui a son centre à l'origine O des coordonnées. Quand le point M décrit le circuit, le point M' décrit un arc correspondant sur la sphère de rayon 1. Donc $\int d\left(\frac{x}{r}\right)$ est la composante suivant l'axe des x de la corde qui sous-tend l'arc de cette sphère sous lequel on voit de l'origine la partie correspondante du circuit. Cette corde s'évanouit quand le circuit se ferme.

Expression des pressions et tensions dans le champ électrodynamique, d'après Maxwell. — La formule que nous venons de donner nous permet d'obtenir l'expression des pressions et tensions de Maxwell dans le milieu électrodynamique. On a

$$\int_n \mathrm{K}'\rho\alpha\, d\omega + \int_n \mathrm{K}'(i_z\beta - i_y\gamma)\, d\omega + \frac{1}{2}\int_s \mathrm{K}'(\sigma\alpha + \tau_z\beta - \tau_y\gamma)\, dS = 0.$$

Si toutes les masses ρ et i sont comprises à l'intérieur d'une certaine surface, l'ensemble de ces masses newtoniennes et laplaciennes éprouve une certaine action et, pour rétablir l'équilibre, il faudrait ajouter sur chaque élément de la surface entourant le champ une pression dont la composante suivant Ox est

$$p_x = \frac{\mathrm{K}'}{2}(\sigma\alpha + \tau_z\beta - \tau_y\gamma).$$

Digitized by Google

CHAPITRE IV.

ÉLÉMENTS DE CALCUL VECTORIEL.

INTRODUCTION.

Pour faciliter la lecture de certains Ouvrages (Maxwell, Lorentz, etc.), je crois utile de donner ici les éléments du calcul vectoriel. Les résultats, que nous avons déjà obtenus jusqu'à ce point du cours où nous sommes parvenus, nous donneront déjà quelques sujets d'application.

Choix des axes. — Le présent cours n'a eu d'autre but, à l'origine, que de reproduire les leçons professées par M. Vaschy. Or, ce professeur employait constamment les axes ordinaires de la géométrie analytique. Nous l'avons suivi. Cependant la plupart des auteurs emploient un système d'axes coordonnés dont l'orientation est différente. Dans le calcul vectoriel, nous nous servirons uniformément de ce nouveau système. Les axes Ox, Oy, Oz forment un trièdre trirectangle défini par le schéma ci-après :

Ox	Oy	Oz
Est	Nord	Zénith.

Ce choix est avantageux pour l'électrodynamique. En effet, posons un circuit circulaire sur le plan des xy ; imaginons qu'il soit parcouru par un courant circulant en sens inverse du sens des aiguilles d'une montre pour un observateur placé du côté des z positifs. Ce courant est donc dirigé dans le sens de rotation qui amène Ox sur Oy par une rotation de 90° autour de Oz de la droite vers la gauche. C'est le sens de rotation d'un tire-bouchon qui progresse suivant la direction Oz.

Ce courant est équivalent à un feuillet ; sur ce feuillet, on distingue

Digitized by Google

une face positive et une face négative ; la face positive est chargée de masses positives ; la face négative est chargée de masses négatives. Dans le système d'axes que nous considérons en ce moment, c'est la face positive qui est tournée du côté des z positifs.

Pour avoir le même résultat avec le système des axes de la géométrie analytique, il faudrait supposer que le sens direct de rotation est celui qui, en s'effectuant autour de Oz, amène Oy sur Ox, contrairement à l'ordre alphabétique, par une rotation de 90°.

Dans ce qui suit, nous admettrons, comme nous venons de le dire, le trièdre (Ox, Oy, Oz ; Est, Nord, Zénith).

Sens de rotation. — Nous considérons comme positive la rotation qui, en s'effectuant autour de Oz, amène Ox sur Oy en tournant de 90°. Nous considérons comme sens positif celui d'un courant qui parcourrait l'équateur terrestre en tournant de l'Ouest à l'Est autour de l'axe des pôles supposé dirigé du pôle Sud vers le pôle Nord. La face positive d'un pareil feuillet serait la face boréale ; elle serait chargée de magnétisme positif.

Feuillets. — Si l'on se donne une courbe fermée (c), il est facile de concevoir une portion de surface qui serait bordée par cette courbe. Il suffit, par exemple, d'imaginer la surface conique qui serait engendrée par le mouvement d'un segment AB de longueur variable, qui pivoterait autour d'un point A, pris pour origine fixe, tandis que l'autre extrémité, le point B, parcourrait la courbe. Ce procédé est applicable, quelque compliquée que soit la courbe (c). Une surface de ce genre, étant développable, aura deux faces distinctes, dont l'une pourrait être peinte en rouge et l'autre en bleu, si on la matérialisait. On ne pourrait passer de la région rouge à la région bleue ou inversement sans franchir le bord. Il y a pourtant des surfaces sur lesquelles on ne peut distinguer deux côtés, comme nous venons de le faire ; mais nous ne considérerons jamais de surfaces de ce genre.

Étant donnée une surface ayant deux faces, limitée par une courbe (c) qui la borde, on rattache la définition de la face positive au sens de parcours choisi comme positif sur la courbe (c).

A cet effet, plaçons-nous, nous-mêmes, sur une des faces ; diri-

Digitized by Google

geons-nous vers un point Q de la courbe (c), c'est-à-dire vers le bord, sans le franchir. Arrivés dans le voisinage immédiat du point Q, envisageons le trièdre trirectangle suivant :

QZ, normale à la surface, du côté de la face où nous sommes ;

QY, normale à la courbe (c) menée dans le plan tangent à la surface au point Q et dirigée vers l'intérieur de la surface sur laquelle nous sommes posés ;

QX, tangente à la courbe (c) dirigée dans le sens de parcours de la courbe (c), dans le sens positif de parcours.

Si les trièdres $Q(X, Y, Z)$ et $O(x, y, z)$ sont des trièdres de même signe, nous dirons que c'est la face sur laquelle nous sommes qui est la face positive.

En cheminant sur le bord et restant sur la face positive, nous laissons à gauche l'aire enveloppée.

SECTION I.

Symbole du calcul vectoriel. — Soient A et B deux vecteurs, l'égalité $A = B$ exprime que les composantes de A suivant les trois axes sont égales aux composantes de B suivant les mêmes axes. Inversement, si cette relation a lieu entre les composantes, on a $A = B$.

(AB), *produit intérieur* ou scalaire des vecteurs A et B, est la quantité scalaire

$$A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z.$$

[AB], *produit extérieur* ou vectoriel des vecteurs A et B, est le vecteur qui a pour composantes les déterminants partiels du Tableau

$$\begin{matrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{matrix}$$

de sorte qu'on aura, pour fixer les idées,

$$[AB]_x = A_y B_z - A_z B_y.$$

Règles de calcul des vecteurs :

1° $(AB) = (BA)$,

2° $[AB] = -[BA]$.

3° $([AB]C) = (A[BC])$.

Digitized by Google

En effet, ces deux expressions représentent le même déterminant

$$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Il suffit de développer soit par rapport aux éléments de la troisième ligne, soit par rapport aux éléments de la première.

Nous désignerons couramment ce déterminant par S.ABC.

4° Soient A, B, C trois vecteurs non coplanaires. On peut décomposer un vecteur D quelconque en trois composantes dirigées respectivement suivant A, B et C. Appelons l, m, n trois quantités scalaires à déterminer. On aura l'équation vectorielle

$$D = lA + mB + nC.$$

Projetons successivement sur les trois axes, nous avons

$$\begin{aligned} D_x &= lA_x + mB_x + nC_x, \\ D_y &= lA_y + mB_y + nC_y, \\ D_z &= lA_z + mB_z + nC_z. \end{aligned}$$

Éliminons l, m, n, il vient

$$\begin{vmatrix} D & A & B & C \\ D_x & A_x & B_x & C_x \\ D_y & A_y & B_y & C_y \\ D_z & A_z & B_z & C_z \end{vmatrix} = 0$$

ou bien

$$DS.ABC = AS.BCD + CS.DAB + BS.DCA.$$

5° $$[A[BC]] = B(AC) - C(AB).$$

Projetons sur l'axe des x; le second membre peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} B_x & A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \\ C_x & A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_x & A_yB_y + A_zB_z \\ C_x & A_yC_y + A_zC_z \end{vmatrix}.$$

Développons; il vient

$$A_y \begin{vmatrix} B_x & B_y \\ C_x & C_y \end{vmatrix} + A_z \begin{vmatrix} B_x & B_z \\ C_x & C_z \end{vmatrix} = A_y[BC]_z - A_z[BC]_y = [A[BC]]_x.$$

La formule est donc démontrée.

6° $$A(A[BC]) = [BC]A^2 + [CA](AB) + [AB](AC).$$

Digitized by Google

Projetons sur l'axe des x. Le premier membre devient

$$\begin{vmatrix} A_x A_x & A_y & A_z \\ A_x B_x & B_y & B_z \\ A_x C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 & A_y & A_z \\ A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z & B_y & B_z \\ A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z & C_y & C_z \end{vmatrix}.$$

Développons par rapport aux éléments de la première colonne; il vient

$$A^2 [BC]_x + (AB)[CA]_x + (AC)[AB]_x.$$

La formule est donc démontrée.

7° $$D(A[BC]) = [AB](CD) + [BC](DA) + [CA](BD).$$

Projetons sur le vecteur A; ce qui veut dire : opérons par (A.), c'est-à-dire formons le produit intérieur du vecteur représenté par chaque terme et de A. Remarquons qu'on a

$$(A[AB]) = 0, \qquad (A[CA]) = 0.$$

Il reste

$$(AD)(A[BC]) = (A[BC])(DA),$$

ce qui est une identité. En projetant sur A, sur B, sur C, on obtient des identités; donc l'égalité proposée est vérifiée.

8° **Application à la théorie des rotations.** — *Principe.* — Une rotation de 180° autour de l'axe OA, suivie d'une rotation de 180° autour de l'axe OB, pratiquée sur un système solide invariable, a pour effet de l'amener dans la même position que celle où l'amènerait une rotation d'un angle $2\widehat{AOB}$ autour d'un axe OR perpendiculaire à OA et à OB. Le trièdre OA, OB, OR est un trièdre de même signe que le trièdre des axes Ox, Oy, Oz, si la rotation autour de OR amène OA sur OB par une rotation égale à $\widehat{AOB}$, de la droite vers la gauche.

Inversement : soit OR un axe de rotation donné. On peut remplacer une rotation d'un angle donné θ autour de OR par deux rotations successives de 180° autour de deux axes OA et OB, perpendiculaires à OR. Ces deux axes OA et OB devront faire entre eux l'angle $\frac{1}{2}\theta$. On pourra se donner, dans le plan perpendiculaire à OR, la direction de l'un des deux axes, l'autre sera alors parfaitement déterminé.

Digitized by Google

Composition des rotations. — Considérons deux rotations successives, la première d'un angle θ autour de l'axe OR, la seconde de l'angle θ_1 autour de l'axe OR_1. Menons au plan ROR_1 la perpendiculaire en O et soit OB la direction de cette perpendiculaire qui est telle que le trièdre $O.RR_1B$ soit de même signe que le trièdre formé par les axes.

On peut remplacer la rotation θ autour de OR par deux rotations de 180° successives dont la seconde s'effectuerait autour de OB, la première s'effectuerait alors autour d'un certain axe OA facile à déterminer. De même, on peut remplacer la rotation θ_1 autour de OR_1 par deux rotations de 180° successives, dont la première s'effectuerait autour de OB et la seconde autour d'un certain axe OC facile à déterminer. L'axe OA est perpendiculaire à OR, l'axe OC est perpendiculaire à OR_1 ; l'axe intermédiaire OB est perpendiculaire à la fois à OR et à OR_1 et c'est autour de lui que doivent s'effectuer successivement deux rotations de 180° ; or, ces deux rotations ramènent le système dans la position où elles l'ont pris. On peut donc en faire abstraction. L'angle AOB est égal à $\frac{\theta}{2}$; l'angle BOC est égal à $\frac{\theta_1}{2}$. Nous avons simplement à considérer les deux rotations de 180° qui s'effectuent la première autour de OA, la seconde autour de OC. Ces deux rotations sont équivalentes à une rotation unique d'un angle double de l'angle $\widehat{AOC}$ qui s'effectuerait autour d'un axe OR_2, perpendiculaire au plan AOC et de sens tel que le trièdre $O.ACR_2$ soit de même signe que le trièdre $O.xyz$.

Cela posé, cherchons l'expression analytique de ces rotations.

La rotation du système d'un angle θ autour de l'axe fixe OR est caractérisée par l'angle θ et par la direction et le sens de l'axe. On peut remplacer ces données par les deux quantités λ et λ', la première scalaire, la seconde vectorielle, qui sont définies par les égalités

$$\lambda = \cos\frac{1}{2}\theta, \qquad \lambda' = \sin\frac{1}{2}\theta,$$

λ' est dirigé suivant OR.

De même, la rotation d'un angle θ_1 autour de OR_1 est caractérisée par la quantité scalaire λ_1 et par le vecteur λ'_1 dirigé suivant OR_1, qui sont définis par les égalités

$$\lambda_1 = \cos\frac{1}{2}\theta_1, \qquad \lambda'_1 = \sin\frac{1}{2}\theta_1.$$

Digitized by Google

Enfin, la rotation résultante sera de même caractérisée par un axe OR_2 et par deux quantités λ_2 scalaire et λ'_2 vectorielle définies par des égalités analogues.

Appelons A, B, C les vecteurs unités dirigés respectivement suivant OA, OB et OC. On aura

$$\begin{aligned} \lambda &= (AB), & \lambda' &= [AB], \\ \lambda_1 &= (BC), & \lambda'_1 &= [BC], \\ \lambda_2 &= (AC), & \lambda'_2 &= [AC]. \end{aligned}$$

Il s'agit, par application de la théorie des vecteurs, de trouver l'expression de λ_2 et de λ'_2 en fonction de λ, λ', λ_1 et λ'_1.

Ces deux quantités λ_2 et λ'_2 déterminent complètement les éléments de la rotation résultante.

Soient x et y deux quantités scalaires; je dis qu'on a

$$A = xB + y[\lambda' B].$$

Opérons par (B.), ce qui revient à projeter sur B, et remarquons qu'on a

$$(B^2) = 1, \qquad ([\lambda' B]B) = 0.$$

Il vient

$$x = (AB) = \lambda.$$

Opérons par ([λ'B].), ce qui revient à projeter sur [λ'B], et remarquons qu'on a

$$(B[\lambda' B]) = 0, \qquad [\lambda' B]^2 = \lambda'^2 B^2 - (\lambda' B)^2 = \lambda'^2.$$

Il vient

$$(A[\lambda' B]) = y\lambda'^2.$$

mais on a

$$(A[\lambda' B]) = (\lambda'[BA]) = -\lambda'^2,$$

d'où

$$y = -1$$

et par suite

$$A = \lambda B - [\lambda' B].$$

On aurait de même

$$C = \lambda_1 B + [\lambda'_1 B].$$

Nous allons alors calculer (AC) et [AC].

Calcul de (AC). — On a

$$(AC) = (\lambda B \lambda_1 B) - ([\lambda' B]\lambda_1 B) + (\lambda B[\lambda'_1 B]) - ([\lambda' B][\lambda'_1 B]).$$

Digitized by Google

Or, on a

$$(\lambda B \lambda_1 B) = \lambda\lambda_1, \qquad ([\lambda' B]\lambda_1 B) = 0, \qquad (\lambda B[\lambda'_1 B]) = 0,$$
$$([\lambda' B][\lambda'_1 B]) = (\lambda'\lambda'_1).$$

Cette dernière égalité se justifie, en remarquant que les deux vecteurs $[\lambda' B]$ et $[\lambda'_1 B]$ ne sont autres que les vecteurs λ' et λ'_1 eux-mêmes, auxquels on aurait fait subir une rotation de 90° autour du vecteur OB, qui est dirigé suivant leur perpendiculaire commune.

Il vient donc

$$\lambda_2 = (AC) = \lambda\lambda_1 + (\lambda'\lambda'_1),$$

ce qui détermine λ_2.

Calcul de [AC]. — En remplaçant A et C par leurs expressions, on a

$$[AC] = [\lambda B \lambda_1 B] - [[\lambda' B]\lambda_1 B] + [\lambda B[\lambda'_1 B]] - [[\lambda' B][\lambda'_1 B]].$$

Mais on a

$$[\lambda B \lambda_1 B] = \lambda\lambda_1[BB] = 0, \quad [\lambda B[\lambda'_1 B]] = \lambda[B[\lambda'_1 B]] = \lambda\{\lambda'_1 B^2 - B(B\lambda'_1)\}.$$

Or,

$$(B\lambda'_1) = 0.$$

Donc

$$[\lambda B[\lambda'_1 B]] = \lambda\lambda'_1.$$

On aurait de même

$$[\lambda' B[\lambda_1 B]] = -\lambda_1\lambda'.$$

Enfin, on a

$$[[\lambda' B][\lambda'_1 B]] = \lambda'_1([\lambda' B]B) - B([\lambda' B]\lambda'_1).$$

Mais on a

$$([\lambda' B]B) = 0.$$

D'autre part, B a la direction de $[\lambda'\lambda'_1]$ et $([\lambda' B]\lambda'_1)$ est le volume du parallélépipède construit sur λ', λ'_1 et B. Comme B est normal à λ' et λ'_1, sa valeur absolue est celle de $[\lambda'\lambda'_1]$ et l'on a

$$-B([\lambda' B]\lambda'_1) = [\lambda'_1\lambda'].$$

Il vient donc, en définitive,

$$\lambda'_2 = [AC] = \lambda\lambda'_1 + \lambda_1\lambda' + [\lambda'_1\lambda'].$$

Cette formule achève de déterminer les éléments de la rotation résultante.

Digitized by Google

SECTION II.

PREMIÈRE PARTIE.

Mouvement des milieux continus. — L'étude du mouvement des milieux continus nous intéresse, en premier lieu, parce que les différents vecteurs qu'on a à considérer en électricité se répartissent comme des flux; en second lieu, l'étude des milieux cristallisés se présente beaucoup plus clairement quand on a étudié les propriétés des fonctions vectorielles linéaires; en troisième lieu, l'établissement des équations du mouvement d'un fluide, en tenant compte du frottement, permet la démonstration de la formule de Stokes relative à la relation qui existe entre la grosseur des gouttes et la vitesse de chute d'un brouillard. Or, cette relation a une grande importance dans la théorie des ions.

Par conséquent, l'étude vectorielle que nous allons faire a une utilité directe pour les questions les plus remarquables abordées dans ce cours.

1° *Déplacement d'un corps rigide, invariable de forme.* — Considérons un point O qui fait partie d'un corps rigide qui se déplace. Menons à partir du point O comme origine trois vecteurs unités α, β, γ formant un système trirectangulaire et supposons-le entraîné avec le corps. Soit A le vecteur mené à partir d'un point fixe F dans l'espace et aboutissant au point O. Le mouvement du point O et du système des trois vecteurs (α, β, γ) définit entièrement le mouvement du corps solide lui-même. Soit M un point quelconque du corps solide. Appelons ρ le vecteur FM dont l'extrémité définit la position du point M. Appelons ρ_1 le vecteur OM. Ce vecteur ρ_1 reste invariable de grandeur pendant le déplacement; de même la grandeur de ses projections sur les vecteurs unités, c'est-à-dire que $(\alpha\rho_1)\,(\beta\rho_1)\,(\gamma\rho_1)$ restent de même invariables.

On aura

$$\rho = A + \rho_1, \qquad \rho_1 = \alpha(\rho_1\alpha) + \beta(\rho_1\beta) + \gamma(\rho_1\gamma).$$

Je vais montrer qu'on a

$$\delta\rho = \delta A + [\pi\rho_1],$$

π étant un vecteur que nous allons déterminer.

Digitized by Google

Des deux équations précédentes, je tire

$$\delta\rho = \delta\Lambda + \delta\rho_1, \qquad \delta\rho_1 = \delta\alpha(\rho_1\alpha) + \delta\beta(\rho_1\beta) + \delta\gamma(\rho_1\gamma).$$

Or, j'ai

$$(\alpha\alpha) = 1, \qquad (\alpha\beta) = 0, \qquad (\alpha\gamma) = 0.$$

D'où

$$(\alpha\,\delta\alpha) = 0, \qquad (\alpha\,\delta\beta) = -(\beta\,\delta\alpha), \qquad (\alpha\,\delta\gamma) = -(\gamma\,\delta\alpha).$$

Je pose

$$\pi_1 = (\gamma\,\delta\beta), \qquad \pi_2 = (\alpha\,\delta\gamma), \qquad \pi_3 = (\beta\,\delta\alpha),$$
$$\pi = \alpha\pi_1 + \beta\pi_2 + \gamma\pi_3.$$

D'où

$$(\alpha\pi) = \pi_1, \qquad (\beta\pi) = \pi_2, \qquad (\gamma\pi) = \pi_3.$$

Je dis que l'on a

$$\delta\alpha = [\pi\alpha], \qquad \delta\beta = [\pi\beta], \qquad \delta\gamma = [\pi\gamma].$$

En effet, on a

$$\delta\alpha = \alpha(\delta\alpha\,\alpha) + \beta(\delta\alpha\,\beta) + \gamma(\delta\alpha\,\gamma)$$

ou

$$\delta\alpha = \beta\pi_3 - \gamma\pi_2 = \beta(\gamma\pi) - \gamma(\beta\pi) = [\pi[\beta\gamma]] = [\pi\alpha].$$

Reportons dans $\delta\rho_1$ les valeurs de $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$. Il vient

$$\delta\rho_1 = [\pi\alpha](\rho_1\alpha) + [\pi\beta](\rho_1\beta) + [\pi\gamma](\rho_1\gamma)$$

ou

$$\delta\rho_1 = [\pi, \alpha(\rho_1\alpha) + \beta(\rho_1\beta) + \gamma(\rho_1\gamma)].$$

$$\delta\rho_1 = [\pi\rho_1].$$

D'où

$$\delta\rho = \delta\Lambda + [\pi\rho_1].$$

Autre forme de π. — On a

$$\delta\alpha = [\pi\alpha], \qquad \delta\beta = [\pi\beta], \qquad \delta\gamma = [\pi\gamma].$$

D'où

$$[\alpha\,\delta\alpha] = [\alpha[\pi\alpha]] = \pi(\alpha\alpha) - \alpha(\pi\alpha)$$

ou

$$[\alpha\,\delta\alpha] = \pi - \alpha(\pi\alpha),$$
$$[\beta\,\delta\beta] = \pi - \beta(\pi\beta),$$
$$[\gamma\,\delta\gamma] = \pi - \gamma(\pi\gamma).$$

Et, par addition,

$$[\alpha\,\delta\alpha + \beta\,\delta\beta + \gamma\,\delta\gamma] = 3\pi - [\alpha(\pi\alpha) + \beta(\pi\beta) + \gamma(\pi\gamma)] = 2\pi.$$

D'où

$$\pi = \frac{1}{2}([\alpha\,\delta\alpha] + [\beta\,\delta\beta] + [\gamma\,\delta\gamma]).$$

Digitized by Google

Sous cette forme, la formule qui donne π est un cas particulier d'une formule que nous établirons plus loin, en traitant de la déformation homogène.

Interprétation de $[\pi\rho_1]$. — C'est un vecteur infiniment petit, comme π lui-même; sa direction est perpendiculaire à la fois sur π et ρ_1. Son sens est tel que si l'on déforme successivement les vecteurs π et ρ_1 pour amener π sur Ox et ρ_1 sur Oy, il viendra se placer sur Oz. Sa valeur absolue est égale au produit du module de π par la projection de ρ_1 sur un plan perpendiculaire à π.

2° *Mouvement d'un milieu continu non rigide.* — On désigne par $(A\nabla)B$ le vecteur qui a pour composantes

$$A_x\frac{\partial B_x}{\partial x}+A_y\frac{\partial B_x}{\partial y}+A_z\frac{\partial B_x}{\partial z},$$
$$A_x\frac{\partial B_y}{\partial x}+A_y\frac{\partial B_y}{\partial y}+A_z\frac{\partial B_y}{\partial z},$$
$$A_x\frac{\partial B_z}{\partial x}+A_y\frac{\partial B_z}{\partial y}+A_z\frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

On peut écrire symboliquement

$$(A\nabla)=A_x\frac{\partial}{\partial x}+A_y\frac{\partial}{\partial y}+A_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Soit f une quantité scalaire, on appelle grad.f, c'est-à-dire gradient de f, le vecteur qui a pour composantes

$$-\frac{\partial f}{\partial x},\quad -\frac{\partial f}{\partial y},\quad -\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Considérons un milieu continu qui se déforme. Soient A un point de ce milieu, O une origine fixe, $OA=\rho$ le rayon vecteur mené de O à A; ρ_x, ρ_y, ρ_z les composantes de ρ. Soit A′ un point très voisin de A, soit $\rho+\delta\rho$ le vecteur OA′; lorsque le milieu est déformé, le point A vient en M et le point A′ en M′. Soient ρ_1 le rayon OM et $\rho_1+\delta\rho_1$ le rayon OM′. Le vecteur infiniment petit $\delta\rho_1$ dépend du vecteur infiniment petit $\delta\rho$. Et l'on a

$$\delta(\rho_1-\rho)=(\delta\rho\nabla)(\rho_1-\rho).$$

Il suffit, pour s'en rendre compte, de développer le second membre, d'après la notation qui vient d'être indiquée.

Digitized by Google

3° *Déformation homogène.* — Soient M la position initiale d'un point matériel du milieu; ρ le rayon vecteur du point M. Nous décomposerons la déformation en trois parties et c'est pour ce motif que nous appelons ρ_3 le rayon vecteur qui aboutit au point M' où le point matériel considéré vient se placer après la déformation.

Une déformation homogène est caractérisée par l'équation vectorielle

$$\rho_3 = A + \alpha_1(\rho\alpha) + \beta_1(\rho\beta) + \gamma_1(\rho\gamma).$$

Les six vecteurs A, α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 peuvent être choisis arbitrairement. En principe nous supposerons que α, β, γ d'une part, α_1, β_1, γ_1 d'autre part ne sont pas coplanaires.

Si ρ dépend linéairement de deux paramètres scalaires u et v, de façon qu'on ait

$$\rho = P + Qu + Rv,$$

P, Q, R étant trois vecteurs quelconques, le point (M) (où aboutit ρ) décrit un plan; et, comme ρ_3 sera, en u et en v, une fonction linéaire de même forme que ρ, il en résulte que (M') décrit aussi un plan, qui sera le plan correspondant du premier. D'ailleurs, à une valeur finie de ρ correspond une valeur finie de ρ_3 et réciproquement. Donc, les points à l'infini se correspondent. Il en résulte qu'à un plan correspond un plan, à une droite, intersection de deux plans, la droite qui est l'intersection des plans correspondants, à deux plans parallèles deux autres plans également parallèles l'un à l'autre. A un parallélépipède correspond un autre parallélépipède.

La déformation homogène se réduit à une translation A et à une déformation caractérisée par l'équation

$$\rho_2 = \alpha_1(\rho\alpha) + \beta_1(\rho\beta) + \gamma_1(\rho\gamma).$$

Et l'on a

$$\rho_3 = A + \rho_2.$$

Dilatation cubique. — Considérons le parallélépipède construit sur les trois vecteurs ρ, ρ', ρ'' de même origine et le parallélépipède transformé construit sur les trois vecteurs ρ_2, ρ'_2, ρ''_2. Rappelons que nous avons désigné par S.ABC le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs A, B, C et que ce volume s'exprime sous forme de déterminant. Suivant que le signe de ce déterminant est positif ou négatif, le trièdre ABC a la même orientation que le trièdre des axes

Digitized by Google

ou l'orientation contraire. L'application de la règle relative au produit de deux déterminants conduit à la relation

$$S\rho_2\rho_2'\rho_2'' = S\rho\rho'\rho'' S\alpha\beta\gamma\, S\alpha_1\beta_1\gamma_1.$$

Posons

$$D = S\alpha\beta\gamma\, S\alpha_1\beta_1\gamma_1.$$

La quantité $D - 1$ représente la dilatation cubique.

Rotation et dilatation pure. — Une déformation homogène est composée d'une rotation, mouvement d'ensemble sans changement de configuration et d'une dilatation pure. Nous allons le faire voir.

La dilatation change ρ_1 en ρ_2, la rotation change ρ en ρ_1.

La translation change ρ_2 en ρ_3.

On passe donc de ρ à ρ_1 (rotation), puis de ρ_1 à ρ_2 (dilatation), puis de ρ_2 à ρ_3 (translation).

La dilatation pure est caractérisée par trois axes Ox, Oy, Oz qui sont entraînés avec le milieu. C'est suivant ces axes que s'opèrent les dilatations principales. Considérons trois vecteurs unités dirigés suivant ces axes et orientés comme le trièdre des axes. Appelons-les i', j', k' avant la rotation et i_1, j_1, k_1 après.

La dilatation pure est une déformation définie par l'équation

$$\rho_2 = m_1 i_1(\rho_1 i_1) + m_2 j_1(\rho_1 j_1) + m_3 k_1(\rho_1 k_1),$$

dans laquelle m_1, m_2, m_3 sont trois quantités scalaires.

Pour se rendre compte de la possibilité de la décomposition signalée, il suffit de comparer le nombre des paramètres indépendants de qui dépend la déformation homogène et le nombre des paramètres qui conditionnent la rotation et la dilatation.

La déformation homogène, abstraction faite de la translation, que nous laissons de côté, est déterminée par les six vecteurs α, β, γ, α_1, β_1, γ_1, c'est-à-dire par neuf quantités scalaires.

La rotation est définie par les trois paramètres d'Euler, θ_1, φ_1, ψ_1, qui fixent la position du trièdre trirectangle i_1, j_1, k_1 par rapport au trièdre i', j', k', et la position initiale de ce trièdre i', j', k' est elle-même définie par les trois paramètres d'Euler θ, φ, ψ par rapport à un système d'axes Ox, Oy, Oz invariable dans l'espace.

Enfin la dilatation pure introduit les trois coefficients m_1, m_2, m_3.

Par conséquent, la rotation et la déformation pure subséquente

Digitized by Google

dépendent, comme la déformation considérée, de neuf paramètres. Ces paramètres seront, si l'on veut, les paramètres θ_1, φ_1, ψ_1, θ, φ, ψ, m_1, m_2, m_3 que nous venons d'énumérer.

Il est donc possible de calculer les éléments de la rotation et de la dilatation pure dont l'effet résultant est équivalent à la déformation homogène envisagée.

Calcul des éléments. — Cherchons ce que deviennent les points du milieu situés sur la sphère $(\rho\rho) = 1$. Par l'effet de la rotation, ils viennent sur la sphère $(\rho_1\rho_1) = 1$. Or, de l'équation

$$\rho_2 = m_1 i_1(\rho_1 i_1) + m_2 j_1(\rho_1 j_1) + m_3 k_1(\rho_1 k_1),$$

on déduit, comme nous allons le montrer,

$$\rho_1 = \frac{i_1}{m_1}(\rho_2 i_1) + \frac{j_1}{m_2}(\rho_2 j_1) + \frac{k_1}{m_3}(\rho_2 k_1)$$

et, par suite, l'équation $(\rho_1\rho_1) = 1$ devient, si l'on y remplace ρ_1 par cette expression,

$$\frac{1}{m_1^2}(\rho_2 i_1)^2 + \frac{1}{m_2^2}(\rho_2 j_1)^2 + \frac{1}{m_3^2}(\rho_2 k_1)^2 = 1,$$

ce qui est l'équation d'un ellipsoïde.

Nous voyons donc que la sphère $(\rho\rho) = 1$ devient un ellipsoïde.

Or, de l'équation

$$\rho_2 = \alpha_1(\rho\alpha) + \beta_1(\rho\beta) + \gamma_1(\rho\gamma),$$

on déduit, comme nous le montrerons,

$$\rho\, S\alpha\beta\gamma\, S\alpha_1\beta_1\gamma_1 = [\beta\gamma] S\rho_2\beta_1\gamma_1 + [\gamma\alpha] S\rho_2\gamma_1\alpha_1 + [\alpha\beta] S\rho_2\alpha_1\beta_1,$$

ce qui permet d'écrire la condition $(\rho\rho) = 1$ en fonction de ρ_2. Cette équation contiendra les coordonnées cartésiennes au second degré ; ce sera un ellipsoïde. En cherchant les directions de ses axes, on aura i_1, j_1, k_1 ; en déterminant leurs longueurs, on déterminera m_1, m_2, m_3.

Considérons, de même, les points qui, après la déformation, sont situés sur une sphère de rayon *un* et pour lesquels, par conséquent, on a $(\rho_2\rho_2) = 1$. Cherchons sur quelle surface ils se trouvaient avant la dilatation et la rotation. De l'équation $(\rho_2\rho_2) = 1$, en vertu de

Digitized by Google

l'équation

$$\rho_2 = m_1 i_1 (\rho_1 i_1) + m_2 j_1 (\rho_1 j_1) + m_3 k_1 (\rho_1 k_1),$$

on déduit l'équation

$$m_1^2 (\rho_1 i_1)^2 + m_2^2 (\rho_1 j_1)^2 + m_3^2 (\rho_1 k_1)^2 = 1,$$

qui est celle d'un autre ellipsoïde. Cet ellipsoïde, avant la rotation, avait pour équation

$$m_1^2 (\rho i')^2 + m_2^2 (\rho j')^2 + m^2 (\rho k')^2 = 1,$$

puisque le trièdre i_1, j_1, k_1 n'est autre que le trièdre sur lequel, par l'effet de la rotation, le trièdre i', j', k' vient se placer.

Or, il est facile, au moyen de l'équation qui définit la déformation homogène, c'est-à-dire ρ_2 en fonction de ρ, de former l'équation en ρ qui résulte de la condition $(\rho_2 \rho_2) = 1$. On obtiendra l'équation d'un ellipsoïde. La direction des axes de cet ellipsoïde fera connaître celle des vecteurs i', j', k', et les grandeurs des demi-axes feront connaître celles des paramètres $\frac{1}{m_1}$, $\frac{1}{m_2}$, $\frac{1}{m_3}$.

Pour vérifier maintenant la formule

$$\rho_1 = \frac{i_1}{m_1} (\rho_2 i_1) + \frac{j_1}{m_2} (\rho_2 j_1) + \frac{k_1}{m_3} (\rho_2 k_1),$$

il suffit de traiter l'équation

$$\rho_2 = m_1 i_1 (\rho_1 i_1) + m_2 j_1 (\rho_1 j_1) + m_3 k_1 (\rho_1 k_1)$$

par $(i_1 .\ )$, par $(j_1 .\ )$ et par $(k_1 .\ )$ successivement.

Il vient, par exemple,

$$(i_1 \rho_2) = m_1 (\rho_1 i_1),$$

car

$$(i_1 i_1) = 1, \qquad (i_1 j_1) = 0, \qquad (i_1 k_1) = 0.$$

Or, on a

$$\rho_1 = i_1 (\rho_1 i_1) + j_1 (\rho_1 j_1) + k_1 (\rho_1 k_1).$$

Et il n'y a qu'à remplacer $(i_1 \rho_1)$, $(j_1 \rho_1)$, $(k_1 \rho_1)$ par leurs valeurs.

De même, pour vérifier l'expression donnée de ρ en fonction des vecteurs $[\beta\gamma]$, $[\gamma\delta]$, $[\alpha\beta]$, il suffit d'écrire

$$\rho = x[\beta\gamma] - y[\gamma\alpha] - z[\alpha\beta].$$

Et l'on déterminera x, par exemple, en opérant par $(\alpha .\ )$. Il vient, en

Digitized by Google

effet,

$$(\rho\alpha) = x\,(\alpha[\beta\gamma]),$$

car on a

$$(\alpha[\gamma\alpha]) = (\alpha[\alpha\beta]) = 0.$$

D'où x. Les valeurs de y et de z s'obtiennent de même.

Formule de transformation. — Supposons que ρ devienne ρ_1 par la rotation qui amène i', j', k' en i_1, j_1, k_1 et que ρ_1 devienne ρ_2 par la dilatation pure, caractérisée par m_1, m_2, m_3. Cherchons la formule qui donne ρ_2 en fonction de ρ.

La dilatation donne

$$\rho_2 = m_1 i_1(\rho_1 i_1) + m_2 j_1(\rho_1 j_1) + m_3 k_1(\rho_1 k_1).$$

Dans la rotation, les quantités $(\rho_1 i_1)$ $(\rho_1 j_1)$ $(\rho_1 k_1)$ étant les projections de ρ_1 sur les axes de dilatation, qui sont entraînés et participent au mouvement, sont égales à $(\rho i')(\rho j')(\rho k')$ respectivement.

On aura donc, pour la formule de transformation cherchée,

$$\rho_2 = m_1 i_1(\rho i') + m_2 j_1(\rho j') + m_3 k_1(\rho k').$$

Nous allons envisager le cas d'une transformation infinitésimale.

Transformation infinitésimale. — Supposons que, dans la transformation précédente, on puisse poser

$$m_1 = 1 + l_1, \qquad m_2 = 1 + l_2, \qquad m_3 = 1 + l_3,$$

les quantités l_1, l_2, l_3 étant infiniment petites.

Supposons également que i_1, j_1, k_1 diffèrent infiniment peu de i', j', k'. On aura donc

$$i_1 = i' + \delta i', \qquad j_1 = j' + \delta j', \qquad k_1 = k' + \delta k'.$$

Et $\delta i'$, $\delta j'$, $\delta k'$ sont trois infiniment petits.

Nous allons montrer ce que devient la formule grâce à ces hypothèses et aux simplifications qui en résultent.

Il vient

$$\rho_2 = (1 + l_1)(i' + \delta i')(\rho i') + (1 + l_2)(j' + \delta j')(\rho j') + (1 + l_3)(k' + \delta k')(\rho k')$$

ou bien

$$\rho_2 = i'(\rho i') + j'(\rho j') + k'(\rho k') + l_1 i'(\rho i') + l_2 j'(\rho j') + l_3 k'(\rho k') + (\rho i')\delta i' + (\rho j')\delta j' + (\rho k')\delta k'.$$

Digitized by Google

Posons

$$\pi'_1 = (k'\partial j') = -(j'\partial k')$$
$$\pi'_2 = (i'\partial k') = -(k'\partial i') \qquad \pi' = i'\pi'_1 + j'\pi'_2 + k'\pi'_3.$$
$$\pi'_3 = (j'\partial i') = -(i'\partial j')$$

D'où

$$\partial i' = [\pi' i'], \qquad \partial j' = [\pi' j'], \qquad \partial k' = [\pi' k'].$$

Avec ces notations, on a

$$\rho_2 = \rho + [\pi'\rho] + l_1 i'(\rho i') + l_2 j'(\rho j') + l_3 k'(\rho k').$$

C'est à cette expression qu'il s'agit d'assimiler la formule

$$\rho_2 = \alpha_1(\rho\alpha) + \beta_1(\rho\beta) + \gamma_1(\rho\gamma).$$

Nous introduisons ici le symbole opératoire φ, tel qu'on ait

$$\varphi\rho = \alpha_1(\alpha\rho) + \beta_1(\beta\rho) + \gamma_1(\gamma\rho).$$

Il convient d'introduire simultanément le symbole opératoire conjugué φ', qui est tel qu'on a

$$\varphi'\rho = \alpha(\alpha_1\rho) + \beta(\beta_1\rho) + \gamma(\gamma_1\rho).$$

On dit qu'une fonction φ est sa propre conjuguée, qu'elle est autoconjuguée, si l'on a

$$(\sigma\varphi\rho) = (\rho\varphi\sigma).$$

La fonction φ que nous avons à envisager n'est pas sa propre conjuguée, mais on remarque que la fonction $(\varphi + \varphi')\rho$ est évidemment sa propre conjuguée, car on a

$$(\sigma\varphi\rho) = \Sigma(\sigma\alpha_1)(\alpha\rho),$$
$$(\sigma\varphi'\rho) = \Sigma(\rho\alpha_1)(\alpha\sigma)$$

et

$$(\sigma(\varphi + \varphi')\rho) = (\rho(\varphi + \varphi')\sigma).$$

Écrivons donc

$$\rho_2 = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi')\rho + \frac{1}{2}(\varphi - \varphi')\rho.$$

Je vais satisfaire aux deux conditions

$$\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')\rho = [\pi'\rho],$$
$$\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')\rho = l_1 i'(\rho i') + l_2 j'(\rho j') + l_3 k'(\rho k') + \rho.$$

Digitized by Google

Détermination de la rotation du système. — On a évidemment

$$(\rho\varphi\rho) = (\rho\varphi'\rho),$$

car ces deux expressions représentent

$$(\rho\alpha_1)(\rho\alpha) + (\rho\beta_1)(\rho\beta) + (\rho\gamma_1)(\rho\gamma).$$

On a donc

$$\left(\rho\,\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')\rho\right) = 0.$$

Cela montre que $\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')\rho$ est un vecteur perpendiculaire à ρ. Et l'on a, effectivement,

$$\alpha'(\alpha_1\rho) - \alpha_1(\alpha\rho) = [\rho[\alpha\alpha_1]].$$

On a deux autres équations analogues et l'on en déduit

$$\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')\rho = -\frac{1}{2}[\rho[\alpha\alpha_1]] - \frac{1}{2}[\rho[\beta\beta_1]] - \frac{1}{2}[\rho[\gamma\gamma_1]] = [\pi'\rho],$$

en posant

$$\pi' = \frac{1}{2}([\alpha\alpha_1] + [\beta\beta_1] + [\gamma\gamma_1]).$$

On a ainsi l'axe et la grandeur de la rotation élémentaire.

Détermination des éléments de la dilatation pure. — Revenons maintenant à l'opération autoconjuguée

$$\left(\frac{1}{2}(\varphi + \varphi') - 1\right)\rho$$

et cherchons à la mettre sous la forme

$$l_1 i''(\rho i'') + l_2 j''(\rho j'') + l_3 k''(\rho' k).$$

A cet effet, remarquons que si cette décomposition est possible, l'équation

$$\left(\frac{1}{2}(\varphi + \varphi') - 1\right)\rho = l\rho$$

est satisfaite quand on fait $l = l_1$ pour $\rho = i''$. Tout autre vecteur parallèle à i'' serait encore solution, à cause de l'homogénéité. Pour $l = l_2$ et $l = l_3$, on aurait de même les solutions $\rho = j''$ et $\rho = k''$.

Posons alors $\frac{1}{2}(\varphi + \varphi') - 1 = \Phi$. L'opérateur Φ est autoconjugué.

Digitized by Google

Cherchons les solutions de l'équation

$$(\Phi - l)\rho = 0.$$

Condition nécessaire pour l'existence d'une solution différente de zéro. Opérations réitérées.— L'opérateur Φ, appliqué au vecteur ρ, représente une opération, dont le résultat $\Phi\rho$ est un vecteur ρ' fonction de ρ. L'opération Φ, appliquée au vecteur ρ', donne à son tour un vecteur ρ''. Nous écrirons $\Phi\rho' = \rho''$ ou $\Phi\Phi\rho = \rho''$ ou $\Phi^2_\rho = \rho''$. Le symbole Φ^2 représente l'opération Φ réitérée. Nous aurons de même $\Phi\rho'' = \rho'''$ ou $\Phi\Phi\rho' = \rho'''$ ou $\Phi\Phi\Phi\rho = \rho'''$, et nous écrirons simplement $\Phi^3_\rho = \rho'''$.

Les vecteurs ρ', ρ'', ρ''', en général, ne sont pas coplanaires; on peut donc, en désignant par x, y, z des quantités scalaires à déterminer, écrire

$$\rho = x\Phi\rho + y\Phi^2\rho + z\Phi^3\rho.$$

Si donc j'ai

$$\Phi\rho = l\rho,$$

il en résulte

$$\rho = (xl + yl^2 + zl^3)\rho.$$

Par suite, s'il y a une solution ρ différente de zéro, il faut qu'on ait

$$1 = xl + yl^2 + zl^3.$$

Direction des axes de dilatation. — Soit l_1 une racine de cette équation en l; cherchons la direction correspondante de ρ. Soit ρ_1 un vecteur ayant cette direction, mais de grandeur quelconque. On aura

$$(\Phi - l_1)\rho_1 = 0.$$

Et, par suite, λ, μ, ν, étant trois vecteurs rectangulaires quelconques, nous aurons

$$(\lambda(\Phi - l_1)\rho_1) = 0 \qquad \text{ou} \qquad (\rho_1(\Phi' - l_1)\lambda) = 0,$$

Φ' est la fonction autoconjuguée de Φ. Ici, $\Phi = \Phi'$.

On a, de même,

$$(\rho_1(\Phi' - l_1)\mu) = 0, \qquad (\rho_1(\Phi' - l_1)\nu) = 0.$$

D'où cette conclusion que ρ_1 est perpendiculaire aux trois vecteurs

$$(\Phi' - l_1)\lambda, \quad (\Phi' - l_1)\mu, \quad (\Phi' - l_1)\nu,$$

Digitized by Google

et comme il n'est pas nul, il faut que ces trois vecteurs soient coplanaires; d'où la relation

$$S(\Phi' - l_1)\lambda(\Phi' - l_1)\mu(\Phi' - l_1)\nu = 0.$$

Alors les trois équations en λ, μ, ν se réduisent à deux distinctes, et, par suite, il faut prendre pour ρ_1 un vecteur quelconque parallèle à

$$[(\Phi' - l_1)\rho(\Phi' - l_1)\nu].$$

Réalité des racines de l'équation en l ($\Phi = \Phi'$). — Je dis que si la fonction Φ est autoconjuguée, les racines l_1, l_2, l_3 sont réelles.

Supposons, en effet, qu'on ait une racine imaginaire

$$l_1 = a + b\sqrt{-1},$$

on en déduira, pour la direction du vecteur correspondant,

$$\rho_1 = \sigma_1 + \tau_1\sqrt{-1},$$

ce qui donnera

$$\Phi(\sigma_1 + \tau_1\sqrt{-1}) = (a + b\sqrt{-1})(\sigma_1 + \tau_1\sqrt{-1}).$$

Séparons la partie réelle et la partie purement imaginaire. On a

$$\Phi\sigma_1 = a\sigma_1 - b\tau_1,$$
$$\Phi\tau_1 = b\sigma_1 + a\tau_1.$$

Or

$$(\tau_1\Phi\sigma_1) = (\sigma_1\Phi\tau_1).$$

D'où, en substituant,

$$-b\tau_1^2 = +b\sigma_1^2.$$

Mais ρ_1 n'est pas identiquement nul, donc $b = 0$. C. Q. F. D.

Les dilatations principales forment un trièdre trirectangulaire. — Je dis maintenant que si les racines l_1, l_2, l_3 sont inégales, les vecteurs correspondants sont rectangulaires deux à deux.

Or nous venons de démontrer qu'ils sont réels.

Soient donc l_1, l_2, l_3 les trois racines. Supposons que ρ_1 correspond à l_1 et ρ_2 à l_2. On aura

$$\Phi\rho_1 = \rho_1 l_1,$$
$$\Phi\rho_2 = \rho_2 l_2.$$

Mais comme on a

$$(\rho_2\Phi\rho_1) = (\rho_1\Phi\rho_2),$$

Digitized by Google

il vient

$$(\rho_1\rho_2)l_1 = (\rho_1\rho_2)l_2;$$

et comme l_1 et l_2 sont différents l'un de l'autre, il reste

$$(\rho_1\rho_2) = 0;$$

c'est la condition de perpendicularité.

Réduction de Φ *à la forme la plus simple.* — Admettons que nous ayons trois racines réelles et inégales, et que pour les vecteurs correspondants ρ_1, ρ_2, ρ_3 nous prenions les trois vecteurs unités i', j', k'. On aura alors

$$\rho = i'(\rho i') + j'(\rho j') + k'(\rho k').$$

D'où

$$\Phi\rho = l_1 i'(\rho i') + l_2 j'(\rho j') + l_3 k'(\rho k').$$

De cette formule, il résulte que $\Phi\rho$ opérera sur le milieu une dilatation pure suivant les axes i', j', k', avec les coefficients de dilatation l_1, l_2, l_3.

Calcul des coefficients de l'équation en l. — *Calcul de* x, y, z, *d'après Hamilton.*

Lemme. — *Résolution de l'équation* $\Phi\rho_1 = [\lambda\mu]$, *la fonction* Φ *étant autoconjuguée.*

Formons

$$(\lambda\Phi\rho_1) \quad \text{et} \quad (\mu\Phi\rho_1);$$

on a

$$(\rho_1\Phi\lambda) = 0, \qquad (\rho_1\Phi\mu) = 0.$$

D'où

$$m\rho_1 = [\Phi\lambda\,\Phi\mu],$$

m étant une quantité scalaire.

Soit ν un vecteur quelconque non coplanaire avec λ et μ. Comme la fonction Φ est autoconjuguée, il vient

$$m(\nu\Phi\rho_1) = (m\rho_1\Phi\nu).$$

D'où

$$m = \frac{S\,\Phi\lambda\,\Phi\mu\,\Phi\nu}{S\lambda\mu\nu}.$$

Il est à remarquer que m ne change pas si l'on remplace λ par

Digitized by Google

$p_1\lambda + p_2\mu$, les quantités p_1 et p_2 étant des quantités scalaires arbitraires; c'est ce qui prouve que m est un invariant, quand on remplace λ, μ, ν par d'autres vecteurs quelconques; ceux-ci, en effet, peuvent toujours être considérés comme les résultantes de leurs composantes suivant λ, μ et ν.

THÉORÈME. — *Si je pose*

$$m = \frac{(\Phi\lambda\,\Phi\mu\,\Phi\nu)}{(\lambda\mu\nu)},$$

$$m_1 = \frac{(\lambda\mu\,\Phi\nu + \Phi\lambda.\mu\nu + \lambda\,\Phi\mu.\nu)}{(\lambda\mu\nu)},$$

$$m_2 = \frac{(\lambda\,\Phi\mu\,\Phi\nu + \Phi\lambda.\mu\,\Phi\nu + \Phi\lambda\,\Phi\mu.\nu)}{(\lambda\mu\nu)},$$

les quantités m, m_1, m_2 sont des invariants, et si Φ^2, Φ^3 sont des symboles d'opérations réitérées, on a, symboliquement,

$$m = m_1\Phi - m_2\Phi^2 + \Phi^3.$$

Tout d'abord, il est à remarquer que m_2 et m_3, de même que m ne varient pas, lorsqu'on remplace λ par $p_1\lambda + p_2\mu$, les quantités p_1 et p_2 étant des coefficients scalaires arbitraires; ce sont donc des invariants.

Examinons alors l'équation

$$(\Phi + g)\rho = [\lambda\mu],$$

g étant une quantité scalaire et Φ étant une quantité vectorielle linéaire autoconjuguée.

D'après la formule établie dans le lemme, la solution sera

$$m_g\rho = [(\Phi + g)\lambda(\Phi + g)\mu]$$

avec

$$m_g = \frac{((\Phi + g)\lambda(\Phi + g)\mu(\Phi + g)\nu)}{(\lambda\mu\nu)}$$

ou

$$m_g = m + m_1 g + m_2 g^2 + g^3,$$

m, m_1, m_2 ayant les valeurs indiquées.

On a donc

$$m_g\rho = [\Phi\lambda\Phi\mu] + g[\lambda\Phi\mu + \Phi\lambda.\mu] + g^2[\lambda\mu].$$

Je dis qu'on a

$$\lambda\Phi\mu + \Phi\lambda.\mu = (m_2 - \Phi)[\lambda\mu].$$

Digitized by Google

L'opération $m_2 - \Phi$ porte sur le vecteur $[\lambda\mu]$.

Pour démontrer cette égalité vectorielle, il suffit de montrer qu'elle est satisfaite, quand on projette sur les trois vecteurs λ, μ, ν.

On a, en effet, la fonction Φ étant autoconjuguée,

$$(\lambda.\lambda\Phi\mu) + (\lambda\Phi\lambda.\mu) = -(\lambda\mu\Phi\lambda) = -(\lambda\Phi[\lambda\mu]),$$

et c'est ce que donne aussi le second membre quand on opère par $(\lambda.)$. Même vérification, en opérant par $(\mu.)$. Enfin, opérons par $(\nu.)$; la troisième équation, ainsi obtenue, revient à la définition de m_2.

Car on a

$$(\nu\lambda\Phi\mu + \nu\Phi\lambda.\mu) = m_2(\lambda\mu\nu) - (\nu\Phi[\lambda\mu]) = m_2(\lambda\mu\nu) - (\lambda\mu\Phi\nu).$$

La formule qui donne ρ peut donc s'écrire

$$m_g\rho = m\rho_1 + g(m_2 - \Phi)[\lambda\mu] + g^2[\lambda\mu],$$

en nous rappelant que, d'après la notation du lemme, on a

$$m\rho_1 = [\Phi\lambda\Phi\mu].$$

Opérons par $(\Phi + g)$, en notant qu'on a

$$(\Phi + g)\rho = [\lambda\mu],$$

il vient

$$m_g[\lambda\mu] = m(\Phi + g)\rho_1 + g(\Phi + g)(m_2 - \Phi)[\lambda\mu] + g^2(\Phi + g)[\lambda\mu];$$

ordonnons suivant les puissances de g et ayons égard à l'équation

$$\Phi\rho_1 = [\lambda\mu],$$

il vient

$$m_g[\lambda\mu] = m[\lambda\mu] + g\{m\rho_1 + (\Phi m_2 - \Phi^2)[\lambda\mu]\} + g^2(m_2 - \Phi + \Phi)[\lambda\mu] + g^3[\lambda\mu].$$

Mais nous avions

$$m_g = m + m_1 g + m_2 g^2 + g^3.$$

On doit donc avoir, pour valeur de m_1,

$$m_1[\lambda\mu] = m\rho_1 + (m_2\Phi - \Phi^2)[\lambda\mu]$$

ou, en opérant par Φ,

$$m_1\Phi[\lambda\mu] = m[\lambda\mu] + m_2\Phi^2[\lambda\mu] - \Phi^3[\lambda\mu],$$

d'où, en résolvant par rapport à m,

$$m = m_1\Phi - m_2\Phi^2 + \Phi^3.$$

Digitized by Google

D'après cette formule, l'équation en l

$$1 = x\,l + y\,l^2 + z\,l^3$$

devrait s'écrire

$$m = m_1\,l - m_2\,l^2 + l^3.$$

Développement des calculs dans le cas des coordonnées cartésiennes pour la détermination de la rotation et de la dilatation pure. — Nous avions

$$\rho_2 = \alpha_1(\rho\alpha) + \beta_1(\rho\beta) + \gamma_1(\rho\gamma).$$

Admettons que α, β, γ soient trois vecteurs unités i, j, k, formant un système trirectangulaire, et supposons α_1, β_1, γ_1 déterminés par les relations

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a_{11}i + a_{21}j + a_{31}k,\\ \beta_1 &= a_{12}i + a_{22}j + a_{32}k,\\ \gamma_1 &= a_{13}i + a_{23}j + a_{33}k.\end{aligned}$$

La fonction conjuguée φ' aura pour expression

$$\varphi' = i(\alpha_1\rho) + j(\beta_1\rho) + k(\gamma_1\rho).$$

Détermination de la rotation. — On posera

$$\pi_1 = (j\rho)\frac{a_{12} - a_{21}}{2} - (k\rho)\frac{a_{31} - a_{13}}{2},$$

$$\pi_2 = (k\rho)\frac{a_{23} - a_{32}}{2} - (i\rho)\frac{a_{12} - a_{21}}{2},$$

$$\pi_3 = (i\rho)\frac{a_{31} - a_{13}}{2} - (j\rho)\frac{a_{23} - a_{32}}{2}.$$

J'aurai alors

$$\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')\rho = \pi_1 i + \pi_2 j + \pi_3 k.$$

Soit alors

$$\begin{aligned}\pi'_1 &= \pi_1(ii') + \pi_2(ji') + \pi_3(ki'),\\ \pi'_2 &= \pi_1(ij') + \pi_2(jj') + \pi_3(kj'),\\ \pi'_3 &= \pi_1(ik') + \pi_2(jk') + \pi_3(kk').\end{aligned}$$

Il viendra

$$\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')\rho = \pi'_1 i' + \pi'_2 j' + \pi'_3 k'.$$

Ce vecteur, qui est égal à $[\pi\rho]$, se trouve ainsi décomposé suivant les axes principaux de dilatation en trois composantes π'_1, π'_2, π'_3.

Digitized by Google

Détermination de la dilatation pure. — Je pose

$$A_1 = a_{11} i + \frac{a_{21} + a_{12}}{2} j + \frac{a_{31} + a_{13}}{2} k,$$

$$B_1 = \frac{a_{12} + a_{21}}{2} i + a_{22} j + \frac{a_{32} + a_{23}}{2} k,$$

$$C_1 = \frac{a_{31} + a_{13}}{2} i + \frac{a_{32} + a_{23}}{2} j + a_{33} k.$$

On aura alors

$$\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')\rho = A_1(i\rho) + B_1(j\rho) + C_1(k\rho).$$

Rappelons-nous que nous avions

$$\rho_2 = \rho + [\pi\rho] + l_1 i''(i''\rho) + l_2 j''(j''\rho) + l_3 k''(k''\rho).$$

Développons, en introduisant les vecteurs unités i, j, k. Nous aurons

$$\begin{aligned}
\rho &= \quad i(\rho i) + \quad j(\rho j) + \quad k(\rho k),\\
(i''\rho) &= (ii'')(\rho i) + (i''j)(\rho j) + (i''k)(\rho k),\\
(j''\rho) &= (ij'')(\rho i) + (jj'')(\rho j) + (kj'')(\rho k),\\
(k''\rho) &= (ik'')(\rho i) + (jk'')(\rho j) + (kk'')(\rho k).
\end{aligned}$$

D'où

$$\rho_2 = [\pi\rho] + \Sigma(\rho i)[i + l_1 i''(ii'') + l_2 j''(ij'') + l_3 k''(ik'')].$$

On a donc, en identifiant, trois équations vectorielles : la première sera

$$a_{11} i + \frac{a_{21} + a_{12}}{2} j + \frac{a_{31} + a_{13}}{2} k = i + l_1 i''(ii'') + l_2 j''(ij'') + l_3 k''(ik'').$$

De celle-ci, en opérant par $(i.)$, on tirera a_{11}; en opérant par $(j.)$, on tirera $\frac{a_{12} + a_{21}}{2}$; en opérant par $(k.)$, on tirera $\frac{a_{31} + a_{13}}{2}$. On obtient ainsi

$$a_{11} = 1 + l_1(ii'')^2 + l_2(ij'')^2 + l_3(ik'')^2,$$

$$\frac{a_{21} + a_{12}}{2} = l_1(ji'')(ii'') + l_2(jj'')(ij'') + l_3(jk'')(ik''),$$

$$\frac{a_{31} + a_{13}}{2} = l_1(ki'')(ii'') + l_2(kj'')(ij'') + l_3(kk'')(ik'').$$

Les autres coefficients s'obtiendraient d'une façon analogue.

De la même équation vectorielle, en opérant par $(i''.)$, on tire

$$(a_{11} - 1 - l_1)(ii'') + \frac{a_{21} + a_{12}}{2}(ji'') + \frac{a_{31} + a_{13}}{2}(ki'') = 0.$$

Digitized by Google

Il faut pour cela tenir compte des relations $(i'j') = 0$ et $(i'k') = 0$ qui expriment que les directions i', j', k' sont celles des arêtes d'un trièdre trirectangle.

On aurait de même

$$\frac{a_{12}+a_{21}}{2}(ii') + (a_{22}-1-l_1)(ji') + \frac{a_{32}+a_{23}}{2}(ki') = 0,$$

$$\frac{a_{31}+a_{13}}{2}(ii') + \frac{a_{32}+a_{23}}{2}(ji') + (a_{33}-1-l_1)(ki') = 0.$$

Il en résulte que l_1 et, par suite, en raison de la symétrie, l_2 et l_3 sont racines de l'équation en l ci-après :

$$\begin{vmatrix} a_{11}-1-l & \frac{a_{21}+a_{12}}{2} & \frac{a_{31}+a_{13}}{2} \\ \frac{a_{12}+a_{21}}{2} & a_{22}-1-l & \frac{a_{23}+a_{32}}{2} \\ \frac{a_{13}+a_{31}}{2} & \frac{a_{32}+a_{23}}{2} & a_{33}-1-l \end{vmatrix} = 0.$$

Remarquons enfin qu'on a

$$a_{11}-1+a_{22}-1+a_{33}-1 = l_1+l_2+l_3.$$

Pour le voir, il suffit d'ajouter membre à membre les équations

$$a_{11} = 1 + \Sigma l_1 (ii')^2, \qquad a_{22} = 1 + \Sigma l_1 (ji')^2, \qquad a_{33} = 1 + \Sigma l_1 (ki')^2$$

et de remarquer qu'on a

$$(ii')^2 + (ji')^2 + (ki')^2 = 1$$

et deux autres équations analogues en j' et k' au lieu de i'.

Rotation infinitésimale. — D'après la théorie de la déformation homogène, la rotation infiniment petite π a pour expression la valeur donnée par

$$2\pi = [\alpha\alpha_1] + [\beta\beta_1] + [\gamma\gamma_1].$$

Ici, nous avons, en appelant ω la vitesse, $\rho_1 - \rho = \omega\, dt$ et par suite

$$\delta\rho_1 = \delta\rho + (\delta\rho\nabla)\omega\, dt.$$

Digitized by Google

Mettons en évidence i, j, k; à cet effet, développons; nous avons

$$\delta\rho = i(i\delta\rho) + j(j\delta\rho) + k(k\delta\rho),$$
$$\nabla = i\,\frac{\partial}{\partial x} + j\,\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z},$$
$$\omega = i\,u + j\,v + kw.$$

Dans cette dernière équation, u, v, w sont les composantes suivant les axes de la vitesse ω. Il vient

$$\delta\rho_1 = i(\delta\rho[i + \nabla u\,dt]) + j(\delta\rho[j + \nabla v\,dt]) + k(\delta\rho[k + \nabla w\,dt]).$$

Cela peut s'écrire

$$\delta\rho_1 = \alpha_1(\alpha\,\delta\rho) + \beta_1(\beta\,\delta\rho) + \gamma_1(\gamma\,\delta\rho),$$

en posant

$$\alpha_1 = i, \qquad \beta_1 = j, \qquad \gamma_1 = k,$$
$$\alpha = i + \nabla u\,dt, \qquad \beta = j + \nabla v\,dt, \qquad \gamma = k + \nabla w\,dt.$$

On aura donc, d'après une formule connue,

$$2\pi = [i + \nabla u\,dt\,i] + [j + \nabla v\,dt\,j] + [k + \nabla w\,dt\,k],$$

ou

$$2\pi = [\nabla u\,dt\,i] + [\nabla v\,dt\,j] + [\nabla w\,dt\,k],$$

ou

$$2\pi = \sum\left[i\frac{\partial u}{\partial x}\,dt + j\frac{\partial u}{\partial y}\,dt + k\frac{\partial u}{\partial z}\,dt, i\right] = \sum\left[-k\frac{\partial u}{\partial y}\,dt + j\frac{\partial u}{\partial z}\,dt\right],$$

ou, en changeant l'ordre des termes,

$$2\pi = \sum i\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)dt,$$

ou encore, plus simplement,

$$\pi = \frac{1}{2}[\nabla\omega]\,dt.$$

C'est la formule qu'on eût pu écrire immédiatement en considérant ∇ comme un vecteur.

Dilatation infinitésimale. — D'après la théorie de la déformation homogène, la dilatation cubique est égale à $D - 1$, en posant

$$D = S\alpha\beta\gamma\,S\alpha_1\beta_1\gamma_1.$$

Reportons-nous aux valeurs de α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 qui viennent

Digitized by Google

d'être données; il vient

$$D = S\,ijk\,S(i + \nabla u\,dt)(j + \nabla v\,dt)(k + \nabla w\,dt).$$

Or, on a

$$S\,ijk = 1.$$

Dans le second facteur, ne conservons que les termes du premier degré en dt; il vient

$$S\,ijk + S(ij\nabla w + jk\nabla u + ki\nabla v)\,dt.$$

Mais on a

$$\nabla u = i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y} + k\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\nabla v = i\frac{\partial v}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial y} + k\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\nabla w = i\frac{\partial w}{\partial x} + j\frac{\partial w}{\partial y} + k\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Remarquons, après avoir substitué ces valeurs, que d'une façon générale $S\lambda\mu\nu = 0$ dès que deux des trois vecteurs λ, μ, ν deviennent parallèles. Il reste

$$D - 1 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dt$$

ou bien

$$D - 1 = (\nabla\omega)\,dt.$$

Développement de la fonction $\left(\frac{\varphi + \varphi'}{2} - 1\right)\delta\rho$. — Nous avons

$$\delta\rho_1 = \varphi\,\delta\rho$$

et

$$\varphi\,\delta\rho = \delta\rho + (\delta\rho\nabla)\omega\,dt$$

ou bien, en développant,

$$\varphi\,\delta\rho = \delta\rho + (\delta\rho\nabla)[iu\,dt + jv\,dt + kw\,dt].$$

On a aussi

$$\varphi'\delta\rho = \delta\rho + (\delta\rho i)\nabla u\,dt + (\delta\rho j)\nabla v\,dt + (\delta\rho k)\Delta w\,dt.$$

Et, par suite,

$$\left(\frac{\varphi + \varphi'}{2} - 1\right)\delta\rho = \frac{1}{2}[\Sigma(\delta\rho\nabla)iu\,dt + \Sigma(\delta\rho i)\nabla u\,dt].$$

Digitized by Google

Le coefficient de i, dans le second membre, est

$$(\delta\rho\, i)\frac{\partial u}{\partial x}\,dt + (\delta\rho\, j)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)dt + (\delta\rho\, k)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)dt.$$

Les coefficients de j et de k seraient, respectivement,

$$(\delta\rho\, i)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)dt + (\delta\rho\, j)\frac{\partial v}{\partial y}\,dt + (\delta\rho\, k)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)dt,$$

$$(\delta\rho\, i)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)dt + (\delta\rho\, j)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)dt + (\delta\rho\, k)\frac{\partial w}{\partial z}\,dt.$$

On en conclut, par assimilation aux formules de la déformation homogène,

$$a_{11}=\frac{\partial u}{\partial x}\,dt, \qquad a_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)dt,$$

$$a_{22}=\frac{\partial v}{\partial y}\,dt, \qquad a_{23}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)dt,$$

$$a_{33}=\frac{\partial w}{\partial z}\,dt, \qquad a_{31}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)dt.$$

C'est ce qui permet d'écrire facilement le déterminant qui, égalé à zéro, forme le premier membre de l'équation en l.

DEUXIÈME PARTIE.

Équations de la dynamique. — Considérons un milieu continu. J'appelle $d\varpi$ l'élément de volume, dS l'élément de surface, n le vecteur unité perpendiculaire à dS et dirigé vers l'intérieur du corps, P_n la pression généralement oblique, qui s'exerce sur l'élément dS dans la direction vers l'intérieur du corps ou de la portion du milieu considérée. L'indice n de P_n rappelle que l'élément dS est dans un plan perpendiculaire à n. Soit $m d\varpi$ la masse, infiniment petite du troisième ordre, de l'élément de volume $d\varpi$. Appelons M le point du milieu où se trouve l'élément $d\varpi$; soit O l'origine, d'ailleurs arbitrairement choisie, des axes de coordonnées; soient i, j, k trois vecteurs unités dirigés suivant les trois axes et formant un système trirectangulaire (Est Nord Zénith); soit OM $=\rho$.

Écrivons l'équation relative à la force résultante et celle relative au moment résultant.

Digitized by Google

Nous avons les deux équations vectorielles

$$\int \left(m \frac{d^2\rho}{dt^2} - m\mathrm{F} \right) d\varpi + \int \mathrm{P}_n \quad d\mathrm{S} = 0,$$
$$\int \left[m \frac{d^2\rho}{dt^2} - m\mathrm{F}, \rho \right] d\varpi + \int [\mathrm{P}_n \rho] \, d\mathrm{S} = 0.$$

La force extérieure $m\mathrm{F}$ sera, par exemple, la force de gravitation ou toute autre, agissant sur m.

1° *Symétrie.* — Un élément de corps est un corps lui-même. Appliquons-lui la première équation. Nous considérons un petit parallélépipède rectangle dont deux faces $d\mathrm{S}$ et $d\mathrm{S}'$ sont toutes deux perpendiculaires à n et se rapprochent indéfiniment l'une de l'autre, en conservant même grandeur. Il restera, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$\mathrm{P}' \, d\mathrm{S}' + \mathrm{P} \, d\mathrm{S} = 0,$$

mais $d\mathrm{S} = d\mathrm{S}'$; d'où $\mathrm{P}' + \mathrm{P} = 0$ ou, en appelant $-n$ la direction opposée à n,

$$\mathrm{P}_{-n} = -\mathrm{P}_n.$$

2° *Variation de la pression suivant la direction de l'élément.* — Supposons que l'élément de corps considéré se réduise à un tétraèdre ayant pour sommet le point M; soient S′, S″, S‴ les surfaces des faces latérales, S la surface de la face de base. Imaginons que le tétraèdre soit infiniment petit; négligeons les infiniment petits d'ordre supérieur, il reste

$$\mathrm{PS} + \mathrm{P}'\mathrm{S}' + \mathrm{P}''\mathrm{S}'' + \mathrm{P}'''\mathrm{S}''' = 0.$$

Mais si nous déformons le tétraèdre de façon que la face S vienne s'appliquer, par exemple, sur la face S‴, les faces S′ et S″ devenant infiniment petites par rapport à celle-là, il restera

$$\mathrm{P} + \mathrm{P}''' = 0.$$

Appelons donc $\mathrm{P}_3 = -\mathrm{P}'''$ ce que devient P lorsque l'orientation de la face S au point M devient celle de la face S‴.

Soient, de même, P_1 et P_2 ce que devient P lorsque S devient

Digitized by Google

parallèle à S′ et S″; nous aurons

$$P = P_1 \frac{S'}{S} + P_2 \frac{S''}{S} + P_3 \frac{S'''}{S}.$$

D'autre part, supposons maintenant que les arêtes du tétraèdre soient parallèles aux vecteurs unités i, j, k et appelons-les α, β, γ, respectivement.

Or on a, *identiquement*,

$$[(-\alpha+\beta)(-\alpha+\gamma)] = [\alpha^2 - \beta\alpha - \alpha\gamma + \beta\gamma]$$

ou

$$[(-\alpha+\beta)(-\alpha+\gamma)] = [\alpha\beta] + [\beta\gamma] + [\gamma\alpha].$$

Cette équation vectorielle, d'après la définition des produits extérieurs, sera équivalente à la suivante, si on l'applique à notre cas :

$$Sn = S'i + S''j + S'''k.$$

Ici, n est le vecteur unité dirigé vers l'extérieur du tétraèdre perpendiculairement à S.

En opérant par $(i.)$, il vient

$$S(ni) = S'.$$

On aurait, de même,

$$S(nj) = S'', \qquad S(nk) = S'''.$$

D'où

$$P_n = P_1(ni) + P_2(nj) + P_3(nk).$$

En représentant par φ le symbole de l'opération

$$P_1(i.) + P_2(j.) + P_3(k.),$$

on peut écrire

$$P_n = \varphi n.$$

Ici, P_n est la pression dirigée vers l'intérieur de la partie pressée.

Formule d'Ostrogradski en notation vectorielle. — Soit U un volume limité par une surface S. Soient l, m, n les cosinus directeurs de la normale dirigés vers l'extérieur du volume U, nous avons établi la formule d'Ostrogradski :

$$\int_U \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) d\varpi = \int_S (lX + mY + nZ)\, dS.$$

Digitized by Google

Soit F le vecteur qui a pour composantes X, Y, Z; soient i, j, k les vecteurs unités dirigés suivant les axes; soit ν le vecteur unité normal à la surface S en un point de l'élément dS, on aura

$$F = Xi + Yj + Zk$$

et

$$(lX + mY + nZ) = (F\nu).$$

La formule précédente pourra s'écrire

$$\int_U \text{div. } F\, d\varpi = \int_S (F\nu)\, dS.$$

Généralisation de la formule d'Ostrogradski. — Soit f une fonction scalaire des coordonnées x, y, z d'un point M. Posons Xf, Yf, Zf à la place de X, Y, Z dans la formule précédente; appelons grad. f le vecteur qui a pour projections suivant les axes $-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial z}$. On aura

$$\int_U \text{div. } fF\, d\varpi = \int_U f \,\text{div. } F\, d\varpi - \int_U (F \,\text{grad. } f)\, d\varpi = \int_S f(F\nu)\, dS.$$

On aura donc

$$\int_U f \,\text{div. } F\, d\varpi = \int_U (F \,\text{grad. } f)\, d\varpi + \int_S f(F\nu)\, dS.$$

Application à un cas particulier remarquable. — Posons

$$f = (\rho\nu'),$$
$$\rho = ix + jy + kz,$$
$$\nu' = i(\nu' i) + j(\nu' j) + k(\nu' k),$$

il vient

$$(\rho\nu') = x(\nu' i) + y(\nu' j) + z(\nu' k)$$

et, par suite,

$$\text{grad.}(\rho\nu') = -(\nu' i)i - (\nu' j)j - (\nu k')k = -\nu';$$

d'où

$$\int (\rho\nu') \,\text{div. } F\, d\varpi = -\int (F\nu')\, d\varpi + \int (\rho\nu')(F\nu)\, dS.$$

Réciprocité des composantes tangentielles. — Nous nous proposons de démontrer que la fonction φ de la formule

$$P_n = \varphi n$$

Digitized by Google

est autoconjuguée et que l'on est, par suite, dans le cas de l'égalité symétrique, où le vecteur P_n se déduit du vecteur n, sans rotation, par une dilatation pure.

Je pose, pour abréger,

$$J = m\frac{d^2\rho}{dt^2} - mF.$$

Les équations du mouvement, avec cette rotation, deviennent

$$\int J \, d\varpi + \int P_n \, dS = 0,$$
$$\int [J\rho] \, d\varpi + \int [P_n \rho] \, dS = 0.$$

De la première, je déduis, λ étant un vecteur arbitraire,

$$\int (\lambda J) \, d\varpi + \int (\lambda P_n) \, dS = 0$$

ou

$$\int (\lambda J) \, d\varpi + \int (\lambda \varphi n) \, dS = 0.$$

Or

$$\int (\lambda \varphi n) \, dS = \int (n \varphi' \lambda) \, dS,$$

d'après la définition de la fonction conjuguée φ';
d'où

$$\int (\lambda J) \, d\varpi = -\int (n \varphi' \lambda) \, dS.$$

Mais, d'après la formule d'Ostrogradski, on a

$$\int (n \varphi' \lambda) \, dS = \int \text{div.} \varphi' \lambda \, d\varpi.$$

Donc, il reste

$$\int (\lambda J) \, d\varpi = -\int \text{div.} \varphi' \lambda \, d\varpi.$$

Et comme cette équation peut être appliquée à l'élément du volume $d\varpi$ lui-même, l'équation du mouvement projeté suivant la direction λ se réduit à

$$(\lambda J) = -\text{div.} \varphi' \lambda.$$

C'est une équation fondamentale.

On aurait tout aussi bien, en considérant un autre vecteur μ,

$$(\mu J) = -\text{div.} \varphi' \mu.$$

Digitized by Google

Reportons-nous maintenant à la seconde équation du mouvement. Traitons-la par $(\lambda\mu)$. Elle devient

$$\int(\lambda\mu[\mathrm{J}\varphi])\,d\varpi+\int(\lambda\mu[\varphi n\varphi])\,d\mathrm{S}=0.$$

Appliquons la formule bien connue

$$[\mathrm{A}[\mathrm{BC}]]=\mathrm{B}(\mathrm{CA})-\mathrm{C}(\mathrm{AB}) \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \mathrm{A}=\mu, & \mathrm{A}=\mu, \\ \mathrm{B}=\mathrm{J}, & \mathrm{B}=\varphi n, \\ \mathrm{C}=\varphi, & \mathrm{C}=\rho. \end{cases}$$

Elle devient

$$(1)\qquad \int((\lambda\mathrm{J})(\mu\varphi)-(\lambda\varphi)(\mu\mathrm{J}))\,d\varpi+\int((\lambda\varphi n)(\mu\varphi)-(\lambda\varphi)(\mu\varphi n))\,d\mathrm{S}=0.$$

Remplaçons $(\lambda\mathrm{J})$ et $(\mu\mathrm{J})$ par leurs valeurs et appliquons la formule que nous avons donnée comme cas particulier de la formule d'Ostrogradski généralisée, il vient

$$\int(\lambda\mathrm{J})(\mu\varphi)\,d\varpi=-\int(\mu\varphi)\,\mathrm{div.}\,\varphi'\lambda\,d\varpi=\int(\mu\varphi'\lambda)\,d\varpi-\int(\rho\mu)(n\varphi'\lambda)\,d\mathrm{S}$$

ou, en revenant de la fonction conjuguée à la fonction φ,

$$\int(\lambda\mathrm{J})(\mu\varphi)\,d\varpi=\int(\lambda\varphi\mu)\,d\varpi-\int(\rho\mu)(\lambda\varphi n)\,d\mathrm{S}.$$

On a, de même,

$$-\int(\lambda\rho)(\mu\mathrm{J})\,d\varpi=-\int(\mu\varphi\lambda)\,d\varpi+\int(\lambda\rho)(\mu\varphi n)\,d\mathrm{S};$$

d'où, par addition, en tenant compte de (1),

$$\int(\lambda\varphi\mu)\,d\varpi=\int(\mu\varphi\lambda)\,d\varpi.$$

Mais on peut appliquer cette formule à un seul élément $d\varpi$, il vient donc

$$(\lambda\varphi\mu)=(\mu\varphi\lambda). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Pressions principales. — La pression subie par un élément de surface est, en général, oblique par rapport à lui. Pourtant, en chaque point, il y a trois éléments de surface, formant un trièdre trirectangle, qui subissent des pressions normales.

Digitized by Google

Si la pression P_n est normale, elle est égale au vecteur n, multiplié par un certain coefficient scalaire t, et l'on a

$$P_n = tn.$$

Cette équation, si l'on remplace P_n par son expression en fonction de P_1, P_2, P_3, peut s'écrire

$$\varphi n = tn.$$

Elle ne peut être satisfaite que si t satisfait à une équation du troisième degré, que nous avons appris à former.

En effet, nous savons que l'on a

$$-m + m_1\Phi - m_2\Phi^2 + \Phi^3 = 0;$$

d'où

$$-m + m_1 t - m_2 t^2 + t^3 = 0.$$

Remplaçons m, m_1 et m_2 par leurs valeurs, cela peut s'écrire

$$S(\lambda t - \Phi\lambda)(\mu t - \Phi\mu)(\nu t - \Phi\nu) = 0.$$

Ce qui veut dire que les trois vecteurs, entre parenthèses, sont coplanaires. D'ailleurs, en raison des propriétés invariantes, on peut prendre $\lambda = i$, $\mu = j$, $\nu = k$.

Mais ici on a

$$\Phi = P_1(i.) + P_2(j.) + P_3(k.);$$

d'où

$$\Phi i = P_1, \qquad \Phi j = P_2, \qquad \Phi k = P_3$$

et, par suite, $P_1 - it$, $P_2 - jt$, $P_3 - kt$ sont coplanaires.

Donc il suffit d'égaler à zéro le déterminant des coefficients de i, j, k dans ces expressions. Or on a

$$\begin{aligned} P_1 &= P_{11}i + P_{12}j + P_{13}k, \\ P_2 &= P_{21}i + P_{22}j + P_{23}k, \\ P_3 &= P_{31}i + P_{32}j + P_{33}k; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{vmatrix} P_{11} - t & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} - t & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} - t \end{vmatrix} = 0.$$

A noter que φ est autoconjuguée; d'où

$$\begin{aligned} P_{12} &= P_{21}, \\ P_{23} &= P_{32}, \\ P_{31} &= P_{13}. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Les trois racines en t sont réelles; si elles sont distinctes, les trois directions n correspondantes sont rectangulaires. La relation

$$\varphi n = tn$$

est la même que celle à laquelle on est conduit en cherchant les axes d'une surface du second degré dont l'équation est

$$(\rho\varphi\rho) = 1.$$

Ici ρ désigne le rayon vecteur du point qui décrit la surface.

En effet, si l'on pose

$$\rho = sn,$$

s étant un coefficient scalaire et n un vecteur unité dirigé suivant ρ, l'équation de la surface donne

$$\frac{1}{s^2} = (n\varphi n).$$

D'ailleurs, on a l'équation de condition

$$(nn) = 1.$$

Cherchons les maxima et minima de $\frac{1}{s^2}$ pour avoir les inverses des carrés de demi-axes. Si l'on appelle t une indéterminée scalaire, on sait qu'on doit écrire

$$\delta(n\varphi n) - t\,\delta(nn) = 0.$$

Mais, comme φ est autoconjuguée, on a

$$(\delta n\varphi n) = (n\varphi\delta n);$$

d'où

$$\delta(n\varphi n) = 2(\delta n\varphi n).$$

Et l'équation en δ devient

$$\big(2\delta n(\varphi n - tn)\big) = 0.$$

Or, δn est un vecteur de direction arbitraire; il reste donc, comme il s'agissait de le démontrer,

$$\varphi n - tn = 0.$$

Soient t_1, t_2, t_3 les trois racines de l'équation en t. Soient i', j', k' les valeurs correspondantes de n. Pour ces valeurs, on aura, par

Digitized by Google

exemple,

$$\dot{\varphi} i' - t_1 i' = 0, \qquad (i' \dot{\varphi} i') - t_1 (i'^2) = 0 \qquad \text{ou} \qquad t_1 = \frac{1}{s^2} \qquad \text{pour} \qquad n = i'.$$

Donc les racines de l'équation en t sont les inverses des carrés des demi-axes.

Les valeurs correspondantes de $\dot{\varphi} n$ sont les *pressions principales*.

Comme les axes de la surface du second degré forment un système trirectangulaire, on a

$$n = i'(ni') + j''(nj'') + k'(nk');$$

d'où

$$\dot{\varphi} n = (ni')\dot{\varphi} i' + (nj'')\dot{\varphi} j' + (nk')\dot{\varphi} k'$$

ou

$$\dot{\varphi} n = t_1 i'(ni') + t_2 j'(nj'') + t_3 k'(nk'),$$

ce qui permet de calculer, en fonction des racines de l'équation en t et des vecteurs unités correspondants, les divers coefficients de la fonction $\dot{\varphi}$.

Calcul de $\dot{\varphi}$. — Nous avons, par exemple,

$$P_n = P_1(ni) + P_2(nj) + P_3(nk).$$

Comme la fonction $\dot{\varphi}$ est autoconjuguée, on en déduit

$$P_n = i(P_1 n) + j(P_2 n) + k(P_3 n).$$

Opérons par (i) en tenant compte de $(i, j) = 0$ et de $(i, k) = 0$, il vient

$$(i P_n) = (P_1 n)$$

ou

$$(P_1 n) = t_1(ii'')(ni'') + t_2(ij'')(nj'') + t_3(ik')(nk'),$$

et, comme la direction n est arbitraire, on aura, par exemple, en faisant $n = i$,

$$(P_1 i) = P_{11} = t_1(ii'')^2 + t_2(ij'')^2 + t_3(ik')^2$$

ou, en faisant $n = j$,

$$(P_1 j) = P_{12} = t_1(ii'')(ji'') + t_2(ij'')(jj'') + t_3(ik')(jk').$$

Et l'on obtiendrait de même les autres coefficients.

Digitized by Google

Corps élastiques isotropes. — Considérons un corps solide isotrope. Supposons que tous les points n'éprouvent que des déplacements infiniment petits à partir de la position pour laquelle les pressions sont nulles. Supposons le corps isotrope. Alors on admet que les pressions principales ont les mêmes directions que les dilatations principales et en sont des fonctions linéaires homogènes.

Soient donc i', j', k' les trois vecteurs unités dirigés suivant les axes de dilatation principale. Soient $P_{i'}$, $P_{j'}$, $P_{k'}$ les pressions principales.

On aura les équations vectorielles

$$\begin{aligned} P_{i'} &= -2k(l_1 + \theta(l_1 + l_2 + l_3))i', \\ P_{j'} &= -2k(l_2 + \theta(l_1 + l_2 + l_3))j', \\ P_{k'} &= -2k(l_3 + \theta(l_1 + l_2 + l_3))k'. \end{aligned}$$

Les constantes k et θ sont des coefficients scalaires qui dépendent de la nature du corps. Ces équations sont telles que si l'on remplace les indices 1, 2, 3 par les mêmes indices pris dans un autre ordre, on retombe sur les mêmes équations, en permutant de même i', j', k'.

Suivons par la pensée un point matériel; supposons qu'à l'époque t, il soit situé au point géométrique M lorsque les pressions sont nulles, mais qu'il se trouve en M′ si les pressions ne sont pas nulles. Prenons un point O quelconque pour origine des rayons vecteurs $OM = \rho$ et $OM' = \rho + \sigma$, le vecteur $MM' = \sigma$ étant infiniment petit. Au lieu de suivre ce point matériel, on pourrait suivre le point matériel infiniment voisin qui, dans l'état naturel ou de repos se trouve en M_1 et qui, dans l'état forcé ou de déformation vient en M_1'. La configuration de la déformation dépend de la façon dont $M'M_1'$ dépend de MM_1.

Soit

$$MM_1 = d\rho, \qquad M'M_1' = d\rho + d\sigma.$$

On aura

$$M'M_1' = \alpha_1(\alpha\, d\rho) + \beta_1(\beta\, d\rho) + \gamma_1(\gamma\, d\rho)$$

ou

$$M'M_1' = \varphi\, d\rho.$$

Mettons les axes cartésiens en évidence, en admettant qu'on ait

$$\alpha = i, \qquad \beta = j, \qquad \gamma = k;$$

soit

$$\begin{aligned} \rho &= ix + jy + kz, \\ \sigma &= i\xi + j\eta + k\zeta \end{aligned}$$

Digitized by Google

et développons ; nous aurons

$$\alpha_1 = i\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + j \frac{\partial \eta}{\partial x} + k \frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

$$\alpha_2 = i \frac{\partial \xi}{\partial y} + j\left(1 + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + k \frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

$$\alpha_3 = i \frac{\partial \xi}{\partial z} + j \frac{\partial \eta}{\partial z} + k\left(1 + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right),$$

et les coefficients différentiels sont supposés infiniment petits.

Donc, on a affaire à une déformation homogène. Elle est décomposable en une rotation d'ensemble et en une dilatation pure. Cette dilatation dépend de la fonction vectorielle $\Phi = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi') - 1$.

Il s'agit de faire le développement ; on trouve :

$$\left(\frac{1}{2}(\varphi + \varphi') - 1\right) d\rho = \left(i \frac{\partial \xi}{\partial x} + j \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + k \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)\right)(i\, d\rho)$$
$$+ \left(i \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + j \frac{\partial \eta}{\partial y} + k \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z}\right)\right)(j\, d\rho)$$
$$+ \left(i \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) + j \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z}\right) + k \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)(k\, d\rho).$$

Cette fonction $\Phi\, d\rho$ donne un vecteur, qui est l'accroissement de $d\rho$ après la déformation élastique, quand on fait abstraction de la rotation d'ensemble. Appelons $\delta\rho$ ce vecteur. On a donc

$$\delta\rho = \Phi\, d\rho.$$

La fonction Φ est une fonction connue.

Notre objectif est d'écrire les équations du mouvement.

Or, nous avons posé

$$P_n = \varphi n,$$

P_n étant la pression qui s'exerce sur l'élément de surface perpendiculaire à la direction du vecteur n.

Mais nous avions pris la notation

$$J = m \frac{d^2 \rho}{dt^2} - mF$$

et nous avions mis l'équation du mouvement sous la forme

$$(\lambda J) = -\operatorname{div} \varphi' \lambda.$$

Digitized by Google

Il ne s'agit donc plus que d'exprimer $\varphi\lambda$ en fonction des coefficients de Φ. La relation qui existe entre les fonctions φ et Φ résulte des hypothèses admises pour la définition des corps isotropes, hypothèses qui se résument dans les équations de relation entre $P_{i'}$, $P_{j'}$, $P_{k'}$ et l_1, l_2, l_3, savoir :

$$\begin{aligned} P_{i'} &= -2k\big(l_1 + \theta(l_1 + l_2 + l_3)\big)i', \\ P_{j'} &= -2k\big(l_2 + \theta(l_1 + l_2 + l_3)\big)j', \\ P_{k'} &= -2k\big(l_3 + \theta(l_1 + l_2 + l_3)\big)k'. \end{aligned}$$

Mais i', j', k' sont trois vecteurs unités dirigés suivant les axes de dilatation principale, lesquels forment un trièdre trirectangle.

On a donc

$$P_n = P_{i'}(i'n) + P_{j'}(j'n) + P_{k'}(k'n);$$

d'où, en vertu des formules précédentes,

$$\begin{aligned} P_n = &-2k\big(l_1(i'n)i' + l_2(j'n)j' + l_3(k'n)\big)k' \\ &+ \theta(l_1 + l_2 + l_3)\big((i'n)i' + (j'n)j' + (k'n)k'\big) \end{aligned}$$

ou

$$P_n = -2k\big(l_1(i'n)i' + l_2(j'n)j' + l_3(k'n)k' + \theta(l_1 + l_2 + l_3)n\big);$$

d'où

$$P_1 = -2k\big(l_1(i'i)i' + l_2(j'i)j' + l_3(k'i)k' + \theta(l_1 + l_2 + l_3)i\big).$$

Il est dès lors facile d'avoir P_{11} et P_{12}, par exemple, car on a

$$P_{11} = (iP_1), \qquad P_{12} = (jP_1),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} P_{11} &= -2k\big(l_1(i'i)^2 + l_2(j'i)^2 + l_3(k'i)^2 + \theta(l_1 + l_2 + l_3)\big), \\ P_{12} &= -2k\big(l_1(i'i)(i'j) + l_2(j'i)(j'j) + l_3(k'i)(k'j)\big). \end{aligned}$$

Les termes en θ disparaissent dans P_{12}, etc., à cause de $(i, j) = 0$.

Reportons-nous maintenant à la formule qui définit la déformation élastique; on a

$$\delta\rho = \Phi\, d\rho;$$

les quantités l_1, l_2, l_3 sont les valeurs de l pour lesquelles on a

$$\Phi\, d\rho = l\, d\rho.$$

Les directions correspondantes de $d\rho$ sont celles des vecteurs i', j', k'.

Digitized by Google

Enfin, on a

$$\Phi\, d\rho = l_1 i'(i\, d\rho) + l_2 j'(j\, d\rho) + l_3 k'(k\, d\rho).$$

Par comparaison avec les expressions de α_1, β_1, γ_1, on en déduit

$$l_1 i' = i \frac{\partial \xi}{\partial x} + j \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tau_1}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + k \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right),$$

$$l_2 j' = i \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \tau_1}{\partial x}\right) + j \frac{\partial \tau_1}{\partial y} + k \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \tau_1}{\partial z}\right),$$

$$l_3 k' = i \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + j \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tau_1}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) + k \frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

Reportons-nous aussi aux formules de la déformation homogène, développées dans le cas des coordonnées cartésiennes et aux expressions des coefficients a_{11}, $\frac{a_{12}+a_{21}}{2}$, etc., en fonction de l_1, l_2, l_3.

On voit qu'on a

$$l_1 + l_2 + l_3 = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \tau_1}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

t

$$P_{11} = -2k\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + 0\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \tau_1}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)\right),$$

$$P_{12} = -2k \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tau_1}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\right).$$

Les autres formules s'obtiendraient par permutation circulaire.

Équations du mouvement des fluides. — S'il n'y a pas de frottement, on admet que, quelle que soit l'orientation d'un élément de surface, la pression qu'il subit demeure constante. On a donc, en appelant p la valeur absolue de cette pression,

$$\left(m \frac{d^2 \rho}{dt^2} - m\,\mathrm{F}\,\lambda\right) = -\,\mathrm{div.}\, p\lambda \qquad (m \text{ densité}).$$

On a

$$p\lambda = pi(\lambda i) + pj(\lambda j) + pk(\lambda k),$$

$$\mathrm{div.}\, p\lambda = (\lambda i)\frac{\partial p}{\partial x} + (\lambda j)\frac{\partial p}{\partial y} + (\lambda k)\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Et si λ coïncide avec i, par exemple, il vient l'équation cartésienne

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} - m\,\mathrm{X} = -\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (m \text{ densité}).$$

Digitized by Google

Aux équations ainsi obtenues, il faut joindre l'équation caractéristique du fluide $\mu = f(p)$.

Il faut aussi ajouter à ces équations l'équation de continuité : celle-ci signifie que la masse de l'élément matériel reste invariable au cours du mouvement.

On a donc

$$\frac{d}{dt}(m\,d\varpi) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dm}{m} + d\frac{d\varpi}{\varpi} = 0.$$

Mais on a

$$\frac{d\,d\varpi}{\varpi} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dt;$$

d'où

$$\frac{dm}{dt} + m\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0.$$

Équations du mouvement des fluides, en tenant compte du frottement. — On peut, en ce cas, faire l'hypothèse que le fluide est incompressible; on peut encore supposer son mouvement assez lent pour que sa densité ne varie pas. On aura alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

On peut admettre également que les forces de frottement qui viennent s'ajouter à la pression sont proportionnelles à des fonctions de la vitesse et que, dans ces fonctions, les vitesses entrent de la même façon que les déplacements entrent eux-mêmes dans les expressions des pressions élastiques.

On a alors

$$P_{11} - p = -2k\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$P_{12} = -2K\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

.....

SECTION III.

Calcul vectoriel (suite). — *Symboles différentiels.* — Nous avons déjà introduit quelques symboles différentiels. Nous les rappelons ici :

Digitized by Google

1° On appelle *divergence du vecteur* A la quantité scalaire

$$\text{div. A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

La formule d'Ostrogradski (ou de Gauss) s'écrit

$$\int_U \text{div. A}\, d\varpi = \int_S A_{\nu_e}\, dS,$$

$A_{\nu_e} = (A\nu_e)$ étant la composante de A suivant la normale ν_e dirigée vers l'extérieur de la surface S qui limite le volume U.

2° On appelle *axe de tourbillon*, *curl* en Angleterre, *rotation* en Allemagne et nous désignerons, indifféremment, par curl A ou par rot. A, le vecteur qui a pour composantes

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y},$$

c'est-à-dire les déterminants qu'on peut former avec le tableau symbolique

$$\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x}, & \frac{\partial}{\partial y}, & \frac{\partial}{\partial z}, \\ A_x, & A_y, & A_z. \end{matrix}$$

3° On désigne par grad. f et l'on appelle *gradient* de la fonction scalaire f le vecteur dont les composantes sont :

$$-\frac{\partial f}{\partial x}, \quad -\frac{\partial f}{\partial y}, \quad -\frac{\partial f}{\partial z}.$$

4° Δf est la quantité scalaire

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

5° A étant un vecteur, ΔA est le vecteur dont les composantes sont :

$$\Delta A_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2},$$

$$\Delta A_y = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2},$$

$$\Delta A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}.$$

Digitized by Google

6° $(A\nabla)B$ est le vecteur qui a pour composantes

$$A_x\frac{\partial B_x}{\partial x}+A_y\frac{\partial B_x}{\partial y}+A_z\frac{\partial B_x}{\partial z},$$
$$A_x\frac{\partial B_y}{\partial x}+A_y\frac{\partial B_y}{\partial y}+A_z\frac{\partial B_y}{\partial z},$$
$$A_x\frac{\partial B_z}{\partial x}+A_y\frac{\partial B_z}{\partial y}+A_z\frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

7° On appelle ∇ le symbole (symbole d'opération ou opérateur)

$$\nabla=i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z},$$

dans l'expression duquel i, j et k sont trois vecteurs unités dirigés suivant Ox, Oy, Oz.

D'après cette notation, on a

8° On a

$$\nabla f=-\operatorname{grad}.f.$$
$$\nabla f=i\frac{\partial f}{\partial x}+j\frac{\partial f}{\partial y}+k\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Réitérons l'opération, en opérant par $(\nabla.\ )$, et tenons compte des relations

$$(i^2)=(j^2)=(k^2)=1,$$
$$(jk)=(ki)=(ij)=0,$$

nous obtenons

$$(\nabla^2 f)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\Delta f.$$

9° On a la règle de calcul :

$$\operatorname{div}.fA=f\operatorname{div}.A-(A\operatorname{grad}.f).$$

Il suffit, pour démontrer cette formule, d'ajouter les trois identités en x, y, z respectivement analogues à la suivante :

$$\frac{\partial fA_x}{\partial x}=f\frac{\partial A_x}{\partial x}+A_x\frac{\partial f}{\partial x}.$$

10° Autre règle de calcul :

$$\operatorname{div}.[AB]=(B\operatorname{rot}.A)-(A\operatorname{rot}.B).$$

Digitized by Google

Cette égalité peut aussi s'écrire symboliquement

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

et, sous cette forme, la règle est intuitive, si l'on réfléchit au changement de signe qui accompagne la transposition de deux lignes voisines dans un déterminant.

On en déduira

$$\int_U (B \text{ rot. } A)\, d\varpi = \int_U (A \text{ rot. } B)\, d\varpi + \int_S ([AB]\nu_e)\, dS.$$

Si, sur la surface S, on a identiquement, soit $A = 0$, soit $B = 0$, l'intégrale de surface sera nulle et il restera

$$\int_U (B \text{ rot. } A)\, d\varpi = \int_U (A \text{ rot. } B)\, d\varpi,$$

formule dont nous aurons à faire usage.

11° Autre règle de calcul :

$$\text{rot. } [AB] = (B\nabla)A - (A\nabla)B + A \text{ div. } B - B \text{ div. } A.$$

En projection sur l'axe des x, il vient

$$\text{rot}_x [AB] = (B\nabla)A_x - (A\nabla)B_x + A_x \text{ div. } B - B_x \text{ div. } A$$

ou, en développant les deux membres,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = {} & B_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ & - A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ & + A_x \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \\ & - B_x \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Supprimons les termes qui se détruisent et il reste la formule évi-

Digitized by Google

dente

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

12° Autre règle de calcul :

$$-\operatorname{grad.}(AB) = [A \operatorname{rot.} B] + [B \operatorname{rot.} A] + (A\nabla)B + (B\nabla)A.$$

Écrivons la projection sur Ox de

$$-\operatorname{grad.}(AB) - (A\nabla)B - (A\nabla)A,$$

il vient

$$A_x\frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_z}{\partial z} + B_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + B_y\frac{\partial A_y}{\partial y} + B_z\frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$-\left(A_x\frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_x}{\partial z} + B_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + B_y\frac{\partial A_x}{\partial y} + B_z\frac{\partial A_x}{\partial z}\right).$$

Supprimons les termes qui se détruisent, et groupons, il vient

$$A_y\left(\frac{\partial}{\partial x}B_y - \frac{\partial}{\partial y}B_x\right) - A_z\left(\frac{\partial}{\partial z}B_x - \frac{\partial}{\partial x}B_z\right)$$
$$+B_y\left(\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right) - B_z\left(\frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z\right)$$

ou

$$[A \operatorname{rot.} B]_x + [B \operatorname{rot.} A]_x.$$

D'où la formule proposée.

13° Autre règle de calcul, évidente celle-là :

$$\operatorname{div.}\operatorname{grad.} f = -\Delta f.$$

14° Formule très utile :

$$\operatorname{rot.}\operatorname{rot.} A = -\operatorname{grad.}\operatorname{div.} A - \Delta A.$$

Considérons, en effet,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right).$$

Ajoutons et retranchons $\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$, il vient

$$-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right).$$

Digitized by Google

La formule est ainsi vérifiée, en projection sur l'axe des x. Même résultat pour les autres axes. La formule est donc justifiée.

15° Formule d'Ostrogradski (ou de Gauss) généralisée :

$$\int_S f\,A_{\nu_e}\,dS = \int_U f\,\text{div. A}\,d\varpi - \int_U (\text{A grad.}\,f)\,d\varpi.$$

16° Transformation d'une intégrale de ligne en une intégrale de surface.

Nous avons établi déjà la formule suivante :

$$\int_S \left[l\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + m\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + n\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right)\right] dS = \int_L (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Mais nous avions pour axes de référence un système conforme au schéma

Ox,	Oy,	Oz,
Est	Sud	Zénith

et nous avions admis pour sens de parcours de la ligne L le sens direct dans lequel on laisse à gauche l'aire enveloppée.

Supposons un observateur debout sur la surface S; c'est de ce côté que se dirige le vecteur ν qui a pour projection l, m, n; si un mobile décrit autour de l'observateur un petit cercle sur la surface S, le sens de description sera direct si l'observateur voit le mobile circuler de droite à gauche devant lui. Avec le système d'axes indiqué, si la direction ν venait à coïncider avec Oz, la rotation directe amènerait Ox sur Oy par un quart de cercle. S'il s'agit de déterminer le sens direct de parcours de la ligne L qui borde la surface S, quelque compliquée que soit cette surface, il suffit d'imaginer que l'observateur se déplace en entraînant le petit cercle et qu'il marche en se dirigeant vers le bord jusqu'à ce que ledit petit cercle devienne tangent au contour. Si, au point de contact, le sens de description de la ligne L est le même que celui du mobile sur son petit cercle, quand il passe au point de contact, le sens de description est direct; il est inverse, dans le cas contraire.

La normale à la surface peut être menée en un point M dans deux directions opposées MN que nous appellerons ν_1 et ν_2. Si, dans le pre-

Digitized by Google

mier membre de la formule, on change ν_1 en ν_2, l, m, n changent de signe, mais si l'on conserve par rapport à ν_2 la même définition du sens de parcours direct que celle qu'on aurait admise par rapport à ν_1, l'intégrale de ligne devra être prise dans le sens opposé et elle changera également de signe.

Donc, peu importe le côté de la surface sur lequel on intègre, pourvu qu'on décrive le contour dans le sens de circulation qui doit être considéré comme direct par rapport à ce côté.

Dans les deux cas, la formule subsiste.

Supposons maintenant, qu'au lieu du système d'axes adopté, nous en prenions un autre formant un trièdre de signe contraire ; mais il est bien entendu que nous conservons toujours la même convention pour le sens de parcours ; le sens direct laisse à gauche l'aire enveloppée : cela est clair pour la partie voisine du bord.

Adoptons donc, comme nous le faisons toujours pour le calcul vectoriel, un système d'axes, conforme au schéma

$$\begin{array}{ccc} Ox, & Oy, & Oz. \\ \text{Est} & \text{Nord} & \text{Zénith} \end{array}$$

Alors, on a

$$\iint \frac{\partial X}{\partial y}\, dx\, dy = -\int X\, dx, \qquad \ldots.$$

Donc, pour que la formule soit vraie, il faut changer le signe de l'un des deux membres. A cet effet, posons

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_x F &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \\ \operatorname{rot}_y F &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \\ \operatorname{rot}_z F &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}, \end{aligned}$$

conformément à notre notation ; il viendra

$$l \operatorname{rot}_x F + m \operatorname{rot}_y F + n \operatorname{rot}_z F = (\nu \operatorname{rot} F),$$

et la formule de Stokes dont nous nous occupons, si nous appelons $d\sigma$ l'élément d'arc du contour, savoir

$$d\sigma = i\, dx + j\, dy + k\, dz,$$

où i, j, k sont les trois vecteurs unités dirigés suivant les axes, de-

Digitized by Google

viendra

$$\int_S (\nu \text{ rot. } F)\, dS = \int_L (F\, d\sigma) \qquad \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\text{E. N. Z.}} \\ Ox\ Oy\ Oz \end{matrix} \right. \quad d\sigma.$$

17° *Variation d'un flux. Variation d'une intégrable double.*— Suivant un point matériel m qui appartient à un milieu continu en mouvement, les coordonnées x, y, z de ce point sont fonctions du temps t. Supposons qu'à ce point M soit attaché un vecteur A. Envisageons le flux de A à travers une surface entraînée avec le milieu et cherchons l'expression analytique de la variation de ce flux.

Le vecteur A est fonction de x, y, z; il est aussi fonction du temps t. Le flux à travers l'élément de surface $d\Sigma$ sera $A_\nu d\Sigma$, en désignant par A_ν la composante de A suivant la normale ν à l'élément $d\Sigma$. L'intégrale I dont nous cherchons la variation est

$$I = \int_\Sigma A_\nu\, d\Sigma.$$

Au lieu de A_ν on pourrait tout aussi bien mettre $(A\nu)$, en appelant ν le vecteur unité mené suivant la direction positive de la normale à l'élément $d\Sigma$.

Au temps t, soit Σ la surface d'intégration et L le contour qui la borde; au temps $t + dt$, la surface d'intégration est devenue Σ' et son contour L'. Pendant ce déplacement la surface Σ a engendré un volume infiniment petit U, et L a engendré une surface latérale infiniment petite S.

Le vecteur A dépend du temps directement et il en dépend aussi indirectement par l'intermédiaire de x, y, z. Lorsque le point M vient en M', le temps a varié de dt, le vecteur A prend une nouvelle valeur A_1 et nous écrirons

$$A_1 = A + \frac{\partial A}{\partial t}\, dt + \delta A$$

ou

$$A_1 = \frac{\partial A}{\partial t}\, dt + A',$$

A' sera égal à $A + \delta A$ et δA sera la variation due aux accroissements de x, y, z.

Au bout de ce temps dt, Σ devient Σ', ν devient ν' et I devient I'.

Digitized by Google

et l'on a

$$I' \parallel \int_{\Sigma} \frac{\partial A_\nu}{\partial t}\, dt\, d\Sigma + \int_{\Sigma'} A'_\nu\, d\Sigma'.$$

Il s'agit de calculer

$$\int_{\Sigma'} A'_\nu\, d\Sigma' - \int_{\Sigma} A_\nu\, d\Sigma.$$

Je vais exprimer les coordonnées x, y, z d'un point du milieu en fonction de trois paramètres (u, v, t), qui vont être choisis comme suit : le paramètre t, c'est le temps; maintenant, je décompose la surface Σ en une série de parallélogrammes infiniment petits par une double infinité de lignes. Pour préciser, soit P un point quelconque de Σ. Divisons le contour L par une infinité de points de division infiniment voisins les uns des autres et joignons au point P ces points de division par une série de lignes qui ne se coupent pas et qui sont tracées sur la surface Σ. On les obtiendra, en faisant varier un paramètre u dont la valeur caractérisera chacune d'elles. On part d'un point origine sur le contour. Soit u_0 la valeur en ce point du paramètre u; on fait croître u et, après avoir fait le tour, le paramètre prend la valeur u_1, de sorte que les deux courbes obtenues pour $u = u_0$ et $u = u_1$ coïncident l'une avec l'autre.

Nous diviserons de même les courbes que nous venons de tracer par une infinité de points de division, en même nombre pour chacune d'elles et tous infiniment rapprochés; par les points de division de même rang, faisons passer la seconde série de courbes. Ces courbes entoureront le point P; l'une d'elles sera en tous ses points infiniment voisine de P; la dernière ne sera autre que la courbe L qui forme le contour de la surface Σ; nous obtiendrons successivement ces différentes courbes en faisant varier un paramètre que nous appellerons v et qui, du contour au point P, ira en croissant de v_0 à v_1. De cette manière, la surface Σ se trouve divisée en une infinité de parallélogrammes infiniment petits. Aucun d'eux n'est nul. L'orientation des deux séries de courbes l'une par rapport à l'autre reste la même sur toute l'étendue de la surface Σ. Elle est bien définie quand on envisage un côté bien déterminé de la surface.

Soit ν le vecteur unité normal à la surface du côté que nous envisageons; soient l, m, n les grandeurs de ses projections sur les axes, c'est-à-dire les cosinus directeurs. Nous sommes libres de choisir le

Digitized by Google

paramètre u de façon que, lorsqu'il va en croissant, le point correspondant du contour L décrive ce contour dans le sens direct par rapport à ν. Imaginons maintenant que les courbes obtenues en faisant varier u seul, puis v seul, soient orientées par rapport à ν comme Ox et Oy le sont par rapport à Oz.

Par sens d'une courbe, j'entends le sens dans lequel le point se déplace sur la courbe lorsque le paramètre va en croissant.

Il est clair que, dans ces conditions, nous aurons

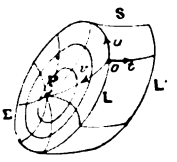
$$l\,d\Sigma = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\,du\,dv,$$

$$m\,d\Sigma = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\,du\,dv,$$

$$n\,d\Sigma = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv,$$

et l'on voit que v va en croissant à partir du bord (*fig.* 59).

Fig. 59.



Considérons enfin le volume U engendré par la surface Σ entre les époques t et $t + dt$. Nous admettrons que le jacobien J de x, y, z par rapport à u, v et t ne s'annule pas dans ce volume.

S'il s'annulait, nous décomposerions U en une série de volumes partiels où cette condition fût satisfaite et nous traiterions le cas de chacun de ces volumes en particulier.

Considérons un point M_i du volume U. En ce point se croisent trois courbes : l'une obtenue en faisant varier u, seul; l'autre en faisant varier v, seul; la troisième en faisant varier t, seul. Nous admettrons que le trièdre formé par ces courbes a le même signe que le trièdre des axes. Le cas contraire sera examiné à part.

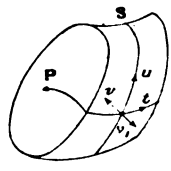
Alors, le jacobien est positif.

Ces préliminaires étant posés, je vais appliquer au volume U la formule d'Ostrogradski; mais il faut, au préalable, se rendre compte

Digitized by Google

du sens de la normale extérieure au volume U. D'après les conventions que nous avons faites, on voit avec un peu d'attention que la normale extérieure a la direction de $-\nu$ sur la surface Σ, tandis que sur la surface Σ' elle a la direction de ν'. Envisageons maintenant la surface latérale S qui est engendrée par le contour L pendant qu'il est entraîné dans le mouvement du milieu (*fig.* 6o). Soit ν_1 le

Fig. 6o.



vecteur unité normal à S et dirigé vers l'extérieur du volume U. Il est facile de voir, d'après l'hypothèse faite sur le signe du jacobien, que les cosinus directeurs l_1, m_1, n_1 de ν_1 sont définis par les formules

$$l_1\,dS = -\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,u)}\,dt\,du,$$

$$m_1\,dS = -\frac{\partial(z,x)}{\partial(t,u)}\,dt\,du,$$

$$n_1\,dS = -\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,u)}\,dt\,du.$$

La formule d'Ostrogradski donne

$$-\int_{\Sigma} A_\nu\,d\Sigma + \int_{\Sigma'} A'_{\nu'}\,d\Sigma' + \int_S A_{\nu_1}\,dS = \int_U \text{div. A}\,d\varpi.$$

En tenant compte de l'hypothèse faite sur le signe du jacobien, nous avons

$$d\varpi = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial t} \end{vmatrix} du\,dv\,dt.$$

Appelons *ds* l'élément de courbe qu'on obtient quand on fait

Digitized by Google

varier seulement le paramètre u et considérons ds comme une quantité vectorielle dont les projections sur les axes ont pour valeurs dx, dy, dz.

Appelons de même δs l'élément de courbe qu'on obtient, quand on fait varier seulement le temps; considérons δs comme un vecteur dont les projections sur les axes ont pour valeur δx, δy, δz.

D'après cela, nous avons

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\,du, \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial u}\,du, \qquad dz = \frac{\partial z}{\partial u}\,du,$$

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial t}\,dt, \qquad \delta y = \frac{\partial y}{\partial t}\,dt, \qquad \delta z = \frac{\partial z}{\partial t}\,dt.$$

Développons le déterminant $d\varpi$ suivant les éléments de la dernière colonne; d'après les valeurs connues de l, m, n, nous obtenons

$$d\varpi = (l\,\delta x + m\,\delta y + n\,\delta z)\,d\Sigma = (\nu\,\delta s)\,d\Sigma.$$

L'intégrale de volume devient

$$\int_{\Sigma} \operatorname{div} \mathrm{A}(\nu\,\delta s)\,d\Sigma.$$

Calculons l'intégrale relative à la surface latérale

$$\int_{S} \mathrm{A}_{\nu_1}\,dS = \int (l_1 \mathrm{A}_x + m_1 \mathrm{A}_y + n_1 \mathrm{A}_z)\,dS.$$

Remplaçons l_1, m_1, n_1 par leurs valeurs, il vient

$$(l_1 \mathrm{A}_x + m_1 \mathrm{A}_y + n_1 \mathrm{A}_z)\,dS = -\begin{vmatrix} \mathrm{A}_x & \mathrm{A}_y & \mathrm{A}_z \\ \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial t} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix} dt\,du.$$

Posons, en notation vectorielle,

$$\mathrm{B} = [\mathrm{A}\,\delta s].$$

Le déterminant précédent peut se mettre sous la forme

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \mathrm{A}_x & \mathrm{A}_y & \mathrm{A}_z \\ \delta x & \delta y & \delta z \end{vmatrix} = \mathrm{B}_x\,dx + \mathrm{B}_y\,dy + \mathrm{B}_z\,dz.$$

Digitized by Google

On aura donc

$$\int_S A_{\nu_1}\, dS = -\int_L (B\, ds).$$

Appliquons la formule de Stokes, il vient

$$\int_S A_{\nu_1}\, dS = -\int_\Sigma (\nu \text{ rot. } B)\, d\Sigma.$$

Par conséquent, la formule d'Ostrogradski nous donne en définitive

$$\int_{\Sigma'} A'_{\nu'}\cdot d\Sigma' - \int_\Sigma A_\nu\, d\Sigma = \int_\Sigma \text{div. } A(\nu\, \delta s)\, d\Sigma + \int_\Sigma (\nu \text{ rot. } B)\, d\Sigma.$$

Et, par suite, la variation de l'intégrale double I deviendra

$$\delta I = \int_\Sigma \left(\left(\nu \frac{\partial A}{\partial t} \right) dt + \text{div. } A(\nu\, \delta s) + (\nu \text{ rot. } [A\, \delta s]) \right) d\Sigma.$$

Si le jacobien était négatif, le sens de ν serait celui de la normale extérieure au volume U sur la surface Σ et le sens de ν' sur la surface Σ' serait celui de la normale intérieure ; mais, en même temps, on aurait

$$d\varpi = -\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix} du\, dv\, dt.$$

D'autre part, ν_1 direction de la normale extérieure au volume U sur la surface latérale serait dirigé de façon que la courbe L, le vecteur ν_1 et la trajectoire d'un point du contour forment, en chaque point de cette courbe L, un trièdre de même signe que celui des axes; donc l_1, m_1, n_1 devraient être remplacés par des valeurs égales et de signe contraire.

Par conséquent, dans la formule d'Ostrogradski, tous les termes devraient changer de signe.

Donc, la formule établie pour δI subsiste.

Posons $\delta s = \omega\, dt$, alors ω sera la vitesse d'entraînement.

Posons aussi

$$\frac{d\dot{A}}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \omega \text{ div. } A + \text{rot. } [A\, \omega].$$

Digitized by Google

En ce cas, l'intégrale I,

$$I = \int_{\Sigma} A_{\nu}\, d\Sigma,$$

aura pour variation δI

$$\delta I = \int_{\Sigma} \left(\nu \frac{dA}{dt} \right) dt\, d\Sigma. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

SECTION IV.

Application de la notation vectorielle aux quatre premiers Chapitres de ce cours. — 1° *Électrostatique.* — Soit E le vecteur qui représente l'intensité du champ. Admettons, pour simplifier, que le pouvoir inducteur électrique, spécifique du milieu, soit égal à l'unité.

L'existence d'un potentiel se traduit par l'équation

$$\text{rot. E} = 0.$$

Si, en un certain point du milieu, il n'y a pas de densité électrique, cette propriété du milieu de n'être pas électrisé s'exprime par l'équation

$$\text{div. E} = 0.$$

Si, au contraire, le milieu est électrisé, la densité ρ de la quantité d'électricité sera donnée par la formule

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \text{div. E}.$$

De même, si l'on appelle ν le vecteur unité normal à la surface S, la quantité totale d'électricité comprise à l'intérieur de cette surface sera

$$Q = \int_{S} \frac{1}{4\pi} (\nu E)\, dS.$$

Dans cette formule, ν est dirigé vers l'extérieur du volume enfermé dans S.

Si cette surface S est celle d'un conducteur en équilibre électrostatique, la densité superficielle électrique σ sera

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} (\nu E)$$

et E sera dirigé suivant ν.

Digitized by Google

Cette deuxième condition ne subsisterait plus si le conducteur était le siège d'un courant permanent.

Prenons un système d'axes répondant au schéma habituel

$$\begin{matrix} X & Y & Z \\ \text{Est} & \text{Nord} & \text{Zénith} \end{matrix},$$

la pression p de Maxwell aura pour expression, en fonction des quantités

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}(Ev) \qquad \text{et} \qquad \tau = \frac{1}{4\pi}[vE],$$

qu'introduit la théorie de Vaschy,

$$p = \frac{1}{2}\sigma E + \frac{1}{2}[\tau E].$$

Il est facile de transformer cette expression, de façon à en déduire la construction géométrique connue; on a, en effet,

$$p = \frac{1}{8\pi}E(Ev) - \frac{1}{8\pi}\big[E[vE]\big].$$

Or, d'après une règle de calcul courante,

$$\big[E[vE]\big] = vE^2 - E(vE);$$

d'où

$$p = 2\frac{1}{8\pi}E(vE) - \frac{1}{8\pi}E^2 v.$$

C'est de la formule cartésienne équivalente à cette formule vectorielle que nous avons déduit la construction géométrique des pressions et tensions du champ électromagnétique.

2° *Magnétisme.* — Appelons H l'intensité du champ magnétique; soit de même B l'intensité de l'induction magnétique; on aura les deux lois suivantes qui expriment, la première que H dérive d'un potentiel, la seconde que la quantité totale de magnétisme est égale à zéro,

$$\text{rot. H} = 0,$$
$$\text{div. B} = 0.$$

Si l'on appelle I l'intensité d'aimantation, on aura

$$B = H + 4\pi I.$$

Digitized by Google

Si la polarisation du diélectrique est due au champ H, le milieu n'étant pas polarisé quand le champ H est nul, on aura

$$I = \varkappa H.$$

Si le milieu est un milieu cristallin, on aura

$$I = \varphi H,$$

φ étant une fonction vectorielle linéaire autoconjuguée.

3° *Électrocinétique.* — Soit S l'intensité du courant en un point d'un conducteur homogène; S est le vecteur courant, c'est la densité du courant par unité de surface normale au flux d'électricité. La distribution du vecteur S satisfait à la loi

$$\text{div. } S = 0.$$

La loi d'Ohm s'exprime par l'équation vectorielle

$$S = cE,$$

d'où l'on déduit

$$\text{rot. } S = 0.$$

Dans les milieux cristallisés, elle aura pour expression

$$S = \psi E,$$

ψ étant une fonction vectorielle linéaire autoconjuguée.

4° *Électromagnétisme.* — L'exploration du champ A, produit par les courants S, conduit à l'équation vectorielle

$$S = \frac{1}{4\pi} \text{rot. } H,$$

qu'on peut considérer comme la véritable définition de S.

Dans un milieu parcouru par des courants permanents, il s'établit un champ électrostatique stable, et l'on a

$$\text{rot. } S = 0.$$

Nous verrons que cette propriété ne subsiste plus si le vecteur E est variable avec le temps; en ce cas, de l'équation $S = \frac{1}{4\pi} \text{rot. } H$, on

Digitized by Google

déduira, par une des règles de calcul qui ont été énoncées,

$$4\pi \text{ rot. S} = \text{rot. rot. H} = -\text{ grad. div. H} - \Delta\text{H}.$$

Comme on a

$$\text{div. H} = 0,$$

il restera

$$\text{rot. S} = -\frac{1}{4\pi}\Delta\text{H}.$$

5° *Électrodynamique.* — Soit ds un vecteur qui représente un élément de courant parcouru par une intensité dont la valeur est égale à i (quantité scalaire); soit F la force électromagnétique qui agit sur cet élément de courant; on a

$$\text{F} = i[\text{H}\, ds].$$

6° *Théorie des actions en raison inverse du carré de la distance. Formule de Vaschy.* — Nous prenons ici les axes Ox, Oy, Oz (Est, Nord, Zénith). Soient $d\varpi$ l'élément de volume U, dS l'élément de surface qui limite le volume U, ν_i le vecteur unité normal à ds dirigé vers l'intérieur du volume U.

Dans ce volume U, on considère la distribution d'un certain vecteur H, c'est ce qu'on appelle le champ du vecteur H.

Si, dans ce même volume, on considère simultanément la distribution d'un second vecteur H', la formule du lemme donne

$$\int (\text{H div. H}' + [\text{rot. H}'.\text{H}] + \text{H}' \text{ div. H} + [\text{rot. H. H}'])\, d\varpi$$
$$= \int (\text{H}(\nu_i \text{H}') + [[\nu_i \text{H}']\text{H}])\, d\text{S} = -\int (\text{H}'(\nu_i \text{H}) + [[\nu_i \text{H}]\text{H}'])\, d\text{S}.$$

La formule de Vaschy s'obtient en faisant dans la formule précédente

$$\text{H}' = \text{grad.}\frac{1}{r}$$

et en posant

$$4\pi\rho = \text{div. H}, \qquad 4\pi\mu = \text{rot. H},$$
$$4\pi\sigma = (\nu_i \text{H}), \qquad 4\pi\tau = [\nu_i \text{H}].$$

Soient alors V le potentiel des masses scalaires ρ et σ, et A le poten-

Digitized by Google

tiel vecteur des masses vectorielles μ et τ; on aura

$$V = \int \frac{\rho\, d\varpi + \sigma\, dS}{r},$$

$$A = \int \frac{\mu\, d\varpi + \tau\, dS}{r},$$

et le théorème de Vaschy prend la forme très simple

$$H = \text{grad.}\, V + \text{rot.}\, A.$$

7° *Électrostatique. Calcul de l'énergie.* — Cherchons le travail des forces électriques. Et, tout d'abord, cherchons ce que devient, par suite du déplacement des charges, la quantité d'électricité contenue dans un certain volume.

On aura

$$\int \delta\rho\, d\varpi = \int \rho(\delta s\, \nu_i)\, dS,$$

en appelant δs le déplacement d'un point matériel quelconque du milieu considéré, emportant sa charge avec lui.

Mais on a

$$\int \rho(\delta s\, \nu_i)\, dS = -\int \text{div.}(\rho\, \delta s)\, d\varpi;$$

d'où

$$\delta\rho = -\,\text{div.}\,\rho\, \delta s.$$

Soit E le vecteur intensité du champ électrostatique.

L'énergie W se calculera par la formule

$$\delta W = -\int (E\rho\, \delta s)\, d\varpi.$$

Cette expression peut se transformer. Dans ces transformations, il y a lieu de remarquer que sur la surface du champ, qui peut être considérée comme reculée au loin, le champ est nul et que, par suite, les intégrales de surface disparaissent. On a alors successivement

$$-\int (E\rho\, \delta s)\, d\varpi = -\int (\text{grad.}V,\, \rho\, \delta s)\, d\varpi = -\int V\, \text{div.}\rho\, \delta s\, d\varpi,$$

et, d'après la formule qui vient d'être établie pour $\delta\rho$,

$$\delta W = \int V\, \delta\rho\, d\varpi = \int V\, \text{div.}\frac{\delta E}{4\pi}\, d\varpi = \int \frac{\delta E}{4\pi}(\text{grad.}\, V)\, d\varpi;$$

Digitized by Google

d'où

$$\delta W = \int \frac{E\,\delta E}{4\pi}\,d\varpi = \delta \int \frac{E^2}{8\pi}\,d\varpi.$$

8° *Électrodynamique. Potentiel électrodynamique.* — Anticipons sur le Chapitre VI qui va suivre et indiquons ici comment le calcul vectoriel présente les opérations et transformations qu'on trouvera données avec les procédés cartésiens au paragraphe 1° intitulé : *Travail des forces électrodynamiques.*

Soit $id\varpi$ le courant élémentaire dans l'élément $d\varpi$. Ici, la quantité i est une quantité vectorielle; soit δs le vecteur qui représente le déplacement d'un élément de courant.

Il s'agit tout d'abord d'évaluer l'accroissement δi du courant à travers un élément de surface. Nous aurons

$$\int \delta i_\nu\, dS = \delta \int i_\nu\, dS.$$

Or, d'après la formule relative à la variation d'une intégrale double $\int A_\nu dS$, nous avons vu que l'on avait à considérer le vecteur

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \omega \operatorname{div}. A + \operatorname{rot}.[A\omega];$$

ω, dans cette formule, représente la vitesse de déplacement du point matériel auquel est attaché le vecteur A.

Ici, nous avons affaire à des courants que nous supposons maintenant constants, donc $\frac{\partial i}{\partial t} = 0$; de plus, la distribution du courant est solénoïdale, donc

$$\operatorname{div}. i = 0.$$

Enfin, l'élément dS a un contour fixe et invariable, et ce sont les éléments de courant qui se déplacent avec un mouvement de translation égal à δs, tandis que, dans le cas de la variation d'une intégrale double, c'était le contour qui était entraîné; on a donc

$$\delta s = -\omega\, dt.$$

Et il vient

$$\delta i = \operatorname{rot}.[\delta s\, i].$$

Cela posé, considérons le travail élémentaire de la force électrodynamique.

Digitized by Google

Soient H le champ magnétique, A le potentiel vecteur. On a, d'après la formule de Vaschy,

$$H = \text{rot. } A.$$

D'autre part, nous appliquerons plusieurs fois la formule

$$\int (A \text{ rot. } B)\, d\varpi = \int (B \text{ rot. } A)\, d\varpi,$$

qui suppose que l'intégrale de surface complémentaire est égale à zéro. C'est ce qu'il y a lieu d'admettre, dans le cas présent, vu que la surface qui limite le champ peut être considérée comme reculée au delà des limites de ce champ, là où H est identiquement nul.

Alors, le travail élémentaire est

$$\delta \mathfrak{T} = \int (H [\delta s\, i])\, d\varpi.$$

C'est cette expression qu'il s'agit de transformer.

On a alors successivement

$$\delta \mathfrak{T} = \int (\text{rot. } A [\delta s\, i])\, d\varpi = \int (\text{rot. } [\delta s\, i] A)\, d\varpi.$$

Mais, d'après la formule qui vient d'être établie au sujet de δi, ceci devient

$$\delta \mathfrak{T} = \int (\delta i A)\, d\varpi = \int \left(A \text{ rot. } \frac{\delta H}{4\pi}\right) d\varpi = \int \left(\frac{\delta H}{4\pi} \text{ rot. } A\right) d\varpi,$$

ou

$$\delta \mathfrak{T} = \int \left(\frac{H}{4\pi} \delta H\right) d\varpi,$$

ou

$$\delta \mathfrak{T} = \delta \int \frac{H^2}{8\pi}\, d\varpi.$$

Digitized by Google

CHAPITRE V.

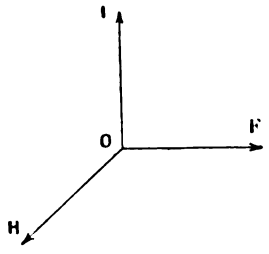
ÉLECTRODYNAMIQUE.

1° **Travail des forces électromagnétiques.** — D'après les formules qui donnent la force qui agit sur un élément de courant, on a

$$\begin{aligned} F_x &= K'(w\beta - v\gamma)\,d\varpi, \\ F_y &= K'(u\gamma - w\alpha)\,d\varpi, \\ F_z &= K'(v\alpha - u\beta)\,d\varpi, \end{aligned}$$

la force F (*fig.* 61), l'intensité du champ magnétique H et le courant I étant disposés dans l'ordre cyclique des axes Ox, Oy, Oz, lesquels forment un trièdre direct, selon le sens adopté en Cinématique (sens des aiguilles d'une montre); les lettres F, H, I sont égale-

Fig. 61.



ment dans l'ordre alphabétique. D'où, en intégrant dans tout l'espace, on déduit pour la variation δT du travail des forces électrodynamiques

$$\delta T = K' \int \Delta\, d\varpi, \qquad \text{en posant} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ u & v & w \\ \delta x & \delta y & \delta z \end{vmatrix}.$$

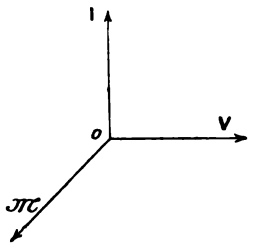
Digitized by Google

Je pose maintenant, pour abréger,

$$\begin{aligned} X &= v\,\delta x - w\,\delta y, \\ Y &= w\,\delta x - u\,\delta z, \\ Z &= u\,\delta y - v\,\delta x; \end{aligned}$$

$\mathfrak{M}$ (composantes X, Y, Z) est le produit vectoriel du courant par le déplacement de la matière (*fig.* 62).

Fig. 62.



J'aurai

$$\delta T = K' \int (\alpha X + \beta Y + \gamma Z)\, d\omega.$$

Mais, d'après les formules de Vaschy appliquées au cas où il n'y a que des masses vectorielles, on a

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \beta &= \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z}, \\ \gamma &= \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x}, \end{aligned}$$

en posant

$$F = \int \frac{u'\, d\varpi'}{r}, \qquad G = \int \frac{v'\, d\varpi'}{r}, \qquad H = \int \frac{w'\, d\varpi'}{r},$$

u', v', w' étant les composantes de la masse vectorielle au point où l'on considère l'élément de volume $d\varpi'$; r est le rayon vecteur qui joint l'élément $d\varpi$ à l'élément $d\varpi'$.

On pourra donc écrire

$$\delta T = K' \int d\varpi \left[X\left(\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}\right) + Y\left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z}\right) + Z\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x}\right)\right],$$

Digitized by Google

ce qui peut encore s'écrire

$$\delta T = K' \int d\varpi \, \Delta,$$

en posant cette fois l'égalité symbolique

$$\Delta = - \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F & G & H \end{vmatrix},$$

le déterminant étant supposé développé par rapport aux éléments de la première ligne.

Mais, en posant, avec la même convention

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \\ F & G & H \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} F & G & H \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix},$$

on a l'égalité

$$J = \Delta_1 + \Delta;$$

d'où

$$\int_U J \, d\varpi = \int_U \Delta_1 \, d\varpi + \int_U \Delta \, d\varpi = \int_S J_1 \, dS,$$

en posant

$$J_1 = \begin{vmatrix} l & m & n \\ X & Y & Z \\ F & G & H \end{vmatrix},$$

l, m, n étant les cosinus directeurs de la normale à la surface S qui enveloppe le volume U, la direction positive étant dirigée vers l'extérieur du volume U.

On aura

$$J_1 = 0$$

si l'on suppose la surface S reculée au delà des limites du champ électrodynamique. Il restera donc

$$\delta T = - K' \int \Delta_1 \, d\varpi.$$

Mais on démontre, d'autre part, ainsi que nous le verrons dans un

Digitized by Google

moment, qu'on a

$$\delta u = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},$$

$$\delta v = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\delta w = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Il vient donc

$$\delta T = + K' \int d\varpi \,(F\,\delta u + G\,\delta v + H\,\delta w).$$

Or, en vertu des formules qui définissent u, v, w, on obtient, en opérant la variation et invertissant les symboles δ et ∂,

$$4\pi\,\delta u = \frac{\partial\,\delta\beta}{\partial z} - \frac{\partial\,\delta\gamma}{\partial y},$$

$$4\pi\,\delta v = \frac{\partial\,\delta\gamma}{\partial x} - \frac{\partial\,\partial\alpha}{\partial z},$$

$$4\pi\,\delta w = \frac{\partial\,\delta\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\,\delta\beta}{\partial x};$$

d'où

$$F\,\delta u + G\,\delta v + H\,\delta w = -\begin{vmatrix} F & G & H \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \delta\alpha & \delta\beta & \delta\gamma \end{vmatrix},$$

et par suite, au moyen d'une transformation semblable à celle qui vient d'être effectuée et où l'intégrale de surface disparaîtra pour les mêmes motifs, on pourra écrire

$$\delta T = -\frac{K'}{4\pi}\int \begin{vmatrix} \delta\alpha & \delta\beta & \delta\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F & G & H \end{vmatrix} d\varpi = \frac{K'}{4\pi}\int d\varpi(\alpha\,\delta\alpha + \beta\,\delta\beta + \gamma\,\delta\gamma),$$

ou

$$\delta T = \delta \int \frac{K'}{8\pi}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\,d\varpi.$$

Il nous reste à démontrer qu'on a bien

$$\delta u = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \qquad \ldots.$$

Le flux du vecteur (u, v, w) à travers une surface S est

$$I = \int (lu + mv + nw)\,dS.$$

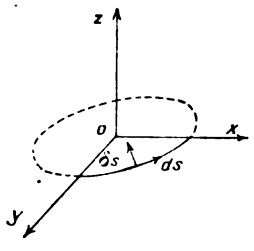
Digitized by Google

Si les courants se déplacent sans changer d'intensité, en chaque point le courant éprouve une variation ; la variation de ce flux sera

$$\delta I = \int (l\,\delta u + m\,\delta v + n\,\delta w)\,dS.$$

Dans ces formules, l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale ON à l'élément dS du côté positif de cette surface (*fig.* 63), le côté positif étant celui des z positifs quand l'élément est placé à l'origine des coordonnées sur le plan des xy ; nous appelons alors *sens positif* de description du contour de l'élément dS, celui dans lequel on tourne autour de Oz dans le sens qui amène Oy sur Ox par une

Fig. 63.



rotation de 90° (Oz vers le Zénith, Ox vers l'Est, Oy vers le Sud). On en déduira, par continuité, le sens positif de description du contour L qui borde S.

Pour bien se rendre compte de la signification de (δu, δv, δw), il y a lieu de remarquer que le contour de la surface d'intégration est fixe dans l'espace et que c'est le courant qui se déplace par rapport à ce contour. Dans ce déplacement, la distribution du vecteur (u, v, w) continue à être solénoïdale, et le courant continue à pouvoir être distribué en filets fermés sur eux-mêmes, le long desquels l'intensité est la même en chaque point; on suit ces filets dans leur mouvement et leur intensité est indépendante du temps, c'est l'hypothèse dans laquelle on effectue le calcul. Les quantités (δx, δy, δz) représentent les composantes du déplacement élémentaire (δs) d'un point matériel du filet conducteur. Il s'agit donc, en définitive, d'un flux coupé; c'est le flux qui se déplace et vient se faire couper par le contour fixe dans le mouvement relatif qu'il a par rapport à lui.

Dans ces conditions, si l'on appelle dx, dy, dz les composantes de

Digitized by Google

l'élément ds du contour qui borde S, si le trièdre δs, ds, i (u, v, w) est positif, le flux δI du vecteur I qui entrera à l'intérieur du contour sera

$$\delta I = \int_L \begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ dx & dy & dz \\ u & v & w \end{vmatrix} = \int_L (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

en posant, conformément à nos notations antérieures

$$\begin{aligned} X &= v\,\delta z - w\,\delta y, \\ Y &= w\,\delta x - u\,\delta z, \\ Z &= u\,\delta y - v\,\delta x. \end{aligned}$$

En transformant l'intégrale de ligne en intégrale de surface, on aura

$$\delta I = \int_S \left[l\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + m\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + n\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right)\right] dS;$$

d'où, par identification,

$$\delta u = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \qquad \ldots \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

2° **Formes diverses de l'intégrale**

$$\int \frac{K'}{8\pi} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, d\varpi.$$

Expression en fonction des intensités et des flux d'induction magnétique. — Supposons, par exemple, pour simplifier, que nous ayons en présence dans le champ deux courants linéaires fermés I_1 et I_2 parcourant des circuits C_1 et C_2.

En dehors de l'espace occupé par ces courants, on aura

$$\frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial y} = 0, \qquad \ldots$$

et ces expressions expriment que (α, β, γ) est un vecteur qui dérive d'un potentiel Ω.

Mais, d'autre part, pour un circuit L_1, embrassant une fois le circuit C_1 dans le sens direct (*fig.* 64), on aura

$$\int_{L_1} (\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz) = 4\pi I_1,$$

Digitized by Google

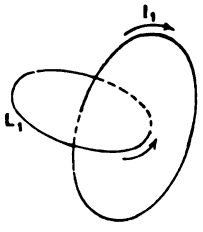
et cette équation exprime que le potentiel Ω n'est pas uniforme.

On aurait, d'ailleurs, également, pour un circuit L_2 embrassant une fois le circuit C_2 tout seul,

$$\int_{L_2} (\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz) = 4\pi I_2.$$

Nous supposons alors que les circuits C_1 et C_2 ne s'embrassent pas l'un l'autre et nous les prenons pour contours de deux dia-

Fig. 64.



phragmes Σ_1 et Σ_2, sur lesquels nous distinguons une face positive et une face négative. La face positive du diaphragme est liée au sens choisi comme positif pour la circulation tout le long du circuit qui le borde. Celui qui chemine dans ce sens en laissant à gauche l'aire enveloppée marche sur la face positive. Nous excluons du volume de l'intégrale à évaluer le volume infiniment petit compris entre les deux faces d'un diaphragme. Alors, dans tout le volume restant, Ω sera un potentiel uniforme, mais les valeurs de Ω sur la face positive et sur la face négative différeront entre elles d'une valeur constante, égale à $4\pi I_1$ pour le diaphragme Σ_1, et égale à $4\pi I_2$ pour le diaphragme Σ_2.

Nous posons

$$\alpha = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \qquad \beta = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \qquad \gamma = -\frac{\partial \Omega}{\partial z};$$

d'où

$$\int_L (\alpha\, dx + \beta\, dy + \delta\, dz) = \Omega_A - \Omega_B,$$

et par suite

$$\Omega_A - \Omega_B = 4\pi I_1$$

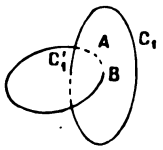
si nous appelons A le point de départ de la ligne L sur la face positive du diaphragme Σ_1 et B son point d'arrivée sur la face négative (*fig.* 65).

Digitized by Google

Cela posé, soit U un volume limité par une surface S constituée elle-même :

1° Par une surface enveloppe rejetée à l'infini, c'est-à-dire en

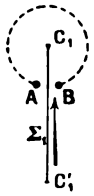
Fig. 65.



dehors du champ et en tous les points de laquelle le vecteur (α, β, γ) est nul;

2° Par les deux faces du diaphragme Σ_1 (*fig.* 66);

Fig. 66.



3° Par les deux faces du diaphragme Σ_2.

On aura

$$\int_U (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, d\varpi = -\int_U \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\beta + \frac{\partial \Omega}{\partial z}\gamma\right) d\varpi;$$

cette intégrale sera égale à

$$\int_U \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) \Omega\, d\varpi + \int_S (l\alpha + m\beta + n\gamma)\, \Omega\, dS$$

(l, m, n cosinus directeurs de la normale à S vers l'intérieur du volume d'intégration).

L'intégrale de volume disparaît, parce que le champ est uniquement produit par des courants et que, par suite,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0;$$

l'intégrale de surface disparaît sur la surface enveloppe du champ,

Digitized by Google

parce qu'à l'infini on a

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

L'intégrale relative au diaphragme Σ_1 se réduit à

$$\int_{\Sigma_1} (l\alpha + m\beta + n\gamma)(\Omega_A - \Omega_B)\, dS = 4\pi I_1 \int_{\Sigma_2} (l\alpha + m\beta + n\gamma)\, dS,$$

l, m, n, étant les cosinus directeurs de la normale à la surface Σ_1, dirigée de la face positive où se trouve le point A vers l'intérieur du volume U.

L'intégrale $\int (l\alpha + m\beta + n\gamma)\, dS$ est le flux du vecteur (α, β, γ) qui entre dans le volume U par la face positive de Σ_1 ou (ce qui revient au même) qui pénètre dans le diaphragme Σ_1 par la face négative.

Posons

$$\Phi = K' \int \left(l \frac{\alpha}{4\pi} + m \frac{\beta}{4\pi} + n \frac{\gamma}{4\pi} \right) dS;$$

Φ sera le flux du vecteur $\left(\frac{K'\alpha}{4\pi}, \frac{K'\beta}{4\pi}, \frac{K'\gamma}{4\pi} \right)$, qu'on pourrait appeler le *déplacement magnétique;* c'est l'induction magnétique divisée par 4π.

Soient Q_1 et Q_2 les valeurs de Q pour les diaphragmes Σ_1 et Σ_2. On aura

$$K' \int \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8\pi}\, d\varpi = \frac{1}{2}(4\pi I_1 \Phi_1 + 4\pi I_2 \Phi_2).$$

Expression en fonction des intensités. — D'après les expressions de α, β, γ en fonction des masses vectorielles, on voit que si le courant I_1 existait seul, le flux serait proportionnel à I_1, et que si le courant I_2 existait seul, il serait proportionnel à I_2; si l'on appelle $(\alpha', \beta', \gamma')$ l'intensité du champ dans le premier cas, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ l'intensité du champ dans le second cas, l'intensité résultante

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha' + \alpha'', \\ \beta &= \beta' + \beta'', \\ \gamma &= \gamma' + \gamma'' \end{aligned}$$

sera l'intensité due à la présence simultanée des deux courants I_1 et

Digitized by Google

I_2, et l'on aura $\Phi = \Phi' + \Phi''$. On pourra donc poser

$$4\pi\Phi_1 = L_1 I_1 + M_{12} I_2,$$
$$4\pi\Phi_2 = M_{21} I_1 + L_2 I_2,$$

d'où il résulte que $K' \int \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8\pi} d\varpi$ est une fonction quadratique des intensités.

Je dis qu'on a $M_{12} = M_{21}$.

Pour le montrer, je considère la variation de l'intégrale

$$\int (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\, d\varpi.$$

J'aurai, par un calcul semblable au précédent,

$$\begin{aligned}
&\int (\alpha\,\delta\alpha + \beta\,\delta\beta + \gamma\,\delta\gamma)\, d\varpi \\
&= -\int \left(\alpha\,\delta\frac{\partial\Omega}{\partial x} + \beta\,\delta\frac{\partial\Omega}{\partial y} + \gamma\,\delta\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right) d\varpi \\
&= -\int \left(\alpha\frac{\partial\,\delta\Omega}{\partial x} + \beta\frac{\partial\,\delta\Omega}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\,\delta\Omega}{\partial z}\right) d\varpi \\
&= \int_U \delta\Omega \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) d\varpi + \int_S \delta\Omega (l\alpha + m\beta + n\gamma)\, dS.
\end{aligned}$$

Il en résulte

$$\frac{1}{4\pi}\int (\alpha\,\delta\alpha + \beta\,\delta\beta + \gamma\,\delta\gamma)\, d\varpi = 4\pi\,\delta I_1\,\Phi_1 + 4\pi\,\delta I_2\,\Phi_2.$$

Appelons W_i l'intégrale

$$\int K' \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8\pi} d\varpi;$$

on aura donc

$$\delta W_i = \delta I_1\, 4\pi\Phi_1 + \delta I_2\, 4\pi\Phi_2;$$

mais on a aussi

$$\delta W_i = \frac{\partial W_i}{\partial I_1}\delta I_1 + \frac{\partial W_i}{\partial I_2}\delta I_2,$$

d'où

$$\frac{\partial W_i}{\partial I_1} = L_1 I_1 + M_{12} I_2,$$
$$\frac{\partial W_i}{\partial I_2} = M_{21} I_1 + L_2 I_2.$$

On en déduit

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial I_1\,\partial I_2} = M_{12} = M_{21}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Digitized by Google

Expression en fonction des éléments de courant. — Soit

$$W = \frac{K'}{8\pi}\int(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,d\varpi;$$

on aura, par des transformations déjà connues,

$$W = -\frac{K'}{8\pi}\int\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F & G & H\end{vmatrix}d\varpi = -\frac{K'}{8\pi}\int\begin{vmatrix}F & G & H\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \alpha & \beta & \gamma\end{vmatrix}d\varpi,$$

$$W = \frac{K'}{2}\int(Fu+Gv+Hw)\,d\varpi = \frac{K'}{2}\int\int\frac{(uu'+vv'+ww')}{r}\,d\varpi\,d\varpi'.$$

L'intégrale de surface complémentaire

$$\int\begin{vmatrix}l & m & n\\ F & G & H\\ \alpha & \beta & \gamma\end{vmatrix}dS$$

s'annule sur la surface enveloppe du champ qui est reculée assez loin pour que, partout, on ait

$$\alpha=\beta=\gamma=0.$$

Or, nous avons dans le cas de deux courants seulement

$$W = \frac{1}{2}(L_1I_1^2+2M_{12}I_1I_2+L_2I_1^2);$$

il en résultera

$$M_{12} = K'\int\int\frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds',$$

en appelant $I_1\,ds$ le vecteur qui a pour composantes $u\,d\varpi$, $v\,d\varpi$, $w\,d\varpi$ et qui n'existe qu'à l'intérieur du circuit C_1 dont ds est l'arc élémentaire, et en appelant, de même, $I_2\,ds'$ le vecteur qui a pour composantes $u'\,d\varpi'$, $v'\,d\varpi'$, $w'\,d\varpi'$ et qui n'existe qu'à l'intérieur du circuit C_2, dont ds' est l'arc élémentaire.

Formule d'Ampère. — Nous avons trouvé pour le travail élémentaire

$$\delta T = \delta W.$$

Supposons que nous déplacions le circuit C_1 par rapport au circuit C_2, le travail élémentaire effectué par les forces électrody-

Digitized by Google

namiques dans ce mouvement relatif sera

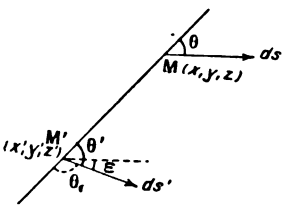
$$\delta T = \delta M_{12} I_1 I_2.$$

Or, soient x, y, z les coordonnées du centre de gravité de ds, et x', y', z' les coordonnées du centre de gravité de ds', on aura (*fig.* 67)

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2;$$

x, y, z sont des fonctions de s; x', y', z' des fonctions de s'.

Fig. 67.



On aura

$$ds\, r \frac{\partial r}{\partial s} = (x - x')\, dx + (y - y')\, dy + (z - z')\, dz = r\, ds \cos\theta;$$

de même :

$$- ds'\, r \frac{\partial r}{\partial s'} = (x - x')\, dx' + (y - y')\, dy' + (z - z')\, dz' = - r\, ds' \cos\theta_1$$

et enfin :

$$ds\, ds' \left(r \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'} + \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{\partial r}{\partial s} \right) = - dx'\, dx - dy'\, dy - dz'\, dz = - ds\, ds' \cos\varepsilon.$$

Nous cherchons la variation $\delta \int\int \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds\, ds'$, quand r varie, ε étant une fonction de r et des dérivées

$$\frac{\partial r}{\partial s}, \quad \frac{\partial r}{\partial s'}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}.$$

On a

$$- \delta \int\int \frac{\cos\varepsilon}{r} ds\, ds' = \delta \int\int \left(\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} \right) ds\, ds'$$

$$= \int_{C_2} ds' \int_{C_1} \frac{\partial\, \delta \frac{\partial r}{\partial s'}}{\partial s} ds + \int\int \delta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} \right) ds\, ds'.$$

La première intégrale s'annule parce que le circuit C_1 est fermé.

Digitized by Google

On a ensuite pour la seconde intégrale

$$-\int\int \frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\delta r\,ds\,ds' + \int\int \frac{1}{r}\frac{\partial \delta r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\,ds\,ds' + \int\int \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial \delta r}{\partial s'}\,ds\,ds';$$

or, l'intégration par parties donne

$$\int\int \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial \delta r}{\partial s}\,ds\,ds' = \int ds'\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s'}\delta r\right) - \int ds' \int \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s'}\right)}{\partial s}\delta r\,ds$$
$$= -\int\int ds\,ds'\left(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right)\delta r.$$

On aurait la même expression pour

$$\int\int \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial \delta r}{\partial s'}\,ds\,ds';$$

il vient donc, en résumé,

$$-\delta\int\int\frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds' = \int\int\frac{1}{r^2}\left(+\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} - 2r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right)\delta r\,ds\,ds'$$
$$= \int\int\frac{1}{r^2}\left[3\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} - 2\left(\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right)\right]ds\,ds'\,\delta r$$
$$= \int\int\frac{1}{r^2}(+3\cos\theta\cos\theta_1 + 2\cos\varepsilon)\,ds\,ds'\,\delta r.$$

Le travail élémentaire du déplacement relatif des deux circuits fermés pourra donc se calculer par la formule d'Ampère, qui donne pour la force agissant entre deux éléments de courants $I_1 ds$, $I_2 ds'$ une force attractive égale à

$$-K'\frac{3\cos\theta\cos\theta' - 2\cos\varepsilon}{r^2}I_1\,ds\,I_2\,ds'.$$

Il paraît logiquement impossible, quand on a affaire à des courants constants parcourant des circuits fermés, d'isoler, autrement que par la pensée, l'action réciproque de deux éléments de courant; mais si l'on considère les courants de conduction comme n'étant en réalité que des courants de convection dus à des déplacements d'électrons, il n'en est plus de même et l'on peut chercher l'action subie par un électron en mouvement, du fait du mouvement d'un autre électron. Pour traiter ce problème, il faudrait recourir aux équations générales du champ électrodynamique.

Rotation du potentiel vecteur des courants particulaires. — Les

Digitized by Google

différences $\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}$ s'étant introduites dans les calculs du travail des forces électrodynamiques, il est intéressant de rechercher la valeur de ces composantes de la rotation du potentiel vecteur dans les milieux magnétiques, le magnétisme étant supposé n'exister que dans les aimants sous forme de masses fictives de fluide magnétique, comme l'imagine Coulomb, ou sous forme de courants particulaires, comme l'imagine Ampère.

Nous allons montrer que si F, G, H sont les composantes du potentiel vecteur dû aux courants particulaires d'Ampère, lesquels sont équivalents aux masses newtoniennes de Coulomb, on a

$$\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y} = \alpha + 4\pi A$$

et deux autres équations analogues.

Nous avons d'ailleurs précisé plus haut comment on obtient le feuillet magnétique équivalent à un courant fermé, ou inversement le petit aimant équivalent à un courant particulaire.

Ce n'était qu'un cas particulier de l'équivalence, qui résulte de la formule ci-après, entre des masses newtoniennes et des masses laplaciennes.

Considérons un vecteur qui serait partout égal à (A, B, C) à l'intérieur de la substance de l'aimant, et égal à zéro, partout ailleurs à l'extérieur. Nous nous proposons d'appliquer à ce cas le théorème de Vaschy et, à cet effet, nous posons

$$\rho = -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right),$$
$$\sigma = -(lA + mB + nC),$$

l, m, n étant les cosinus directeurs de la normale à la surface de l'aimant dirigée vers l'intérieur de l'aimant, puis

$$\mu_x = -\left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y}\right), \qquad \tau_x = -(nB - mC),$$
$$\mu_y = -\left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z}\right), \qquad \tau_y = -(lC - nA),$$
$$\mu_z = -\left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right). \qquad \tau_z = -(mA - lB).$$

Pour se rappeler aisément le signe de ces différences, il suffit de

Digitized by Google

remarquer qu'on peut écrire symboliquement

$$\begin{vmatrix} \mu_x & \mu_y & \mu_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A & B & C \end{vmatrix} = \mu^2 \qquad \text{et} \qquad \begin{vmatrix} \tau_x & \tau_y & \tau_z \\ l & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix} = \tau^2.$$

On aura, en un point extérieur à l'aimant,

$$0 = \int_U \rho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\varpi + \int_S \sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS + \int_U \left(\mu_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \mu_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\varpi$$
$$+ \int_S \left(\tau_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \tau_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dS.$$

Or, d'après la théorie de sir William Thomson, le potentiel d'un aimant a pour expression

$$V = \int_U \rho \frac{d\varpi}{r} + \int_S \sigma \frac{dS}{r}.$$

Calculons la force en un point x' y', z' extérieur à l'aimant; on aura pour la composante suivant Ox

$$- \frac{\partial V}{\partial x'} = - \int_U \rho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} d\varpi - \int_S \sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} dS;$$

mais, d'autre part,

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} = - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x},$$

d'où

$$- \frac{\partial V}{\partial x'} = \int_U \rho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\varpi + \int_S \sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS.$$

Donc, on a, d'après la formule de Vaschy,

$$- \frac{\partial V}{\partial x'} = - \int \left(\mu_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \mu_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\varpi - \int \left(\tau_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \tau_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dS,$$

ce qui prouve que les masses vectorielles $-\mu$ et $-\tau$ sont équivalentes aux masses newtoniennes ρ et σ.

Digitized by Google

Cela posé, appliquons encore le théorème de Vaschy, mais ce sera cette fois à l'intérieur de l'aimant, au vecteur (A, B, C), en remarquant que Vaschy met $4\pi\rho$, etc., là où nous mettons maintenant $-\rho$, etc. Il vient

$$-4\pi A' = \int_U \rho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\varpi + \int_S \sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS + \int_U \left(\mu_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \mu_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\varpi$$
$$+ \int_S \left(\tau_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \tau_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dS,$$

A', B', C' désignant ce que deviennent A, B, C au point x', y', z', qui est, nous le spécifions, à l'intérieur de l'aimant. Si j'appelle α', β', γ' les composantes de l'intensité du champ magnétique au point x', y', z', à l'intérieur d'un cylindre infiniment délié dirigé suivant la ligne d'aimantation, j'aurai

$$\alpha' = -\frac{\partial V}{\partial x'},$$

et il viendra, en se reportant à la valeur de $\frac{\partial V}{\partial x'}$,

$$\alpha' + 4\pi A' = -\int \left(\mu_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \mu_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\varpi - \int \left(\tau_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \tau_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dS.$$

Mais, soient F, G, H les composantes du potentiel vecteur des courants particulaires équivalents aux masses newtoniennes, c'est-à-dire de $-\mu$ et $-\tau$, on a

$$F = \int \frac{-\mu_x \, d\varpi}{r} + \int \frac{-\tau_x \, d\varpi}{r}, \qquad \ldots,$$

d'où

$$\alpha' + 4\pi A' = -\frac{\partial H}{\partial y'} + \frac{\partial G}{\partial z'}, \qquad \ldots.$$

C. Q. F. D.

Ainsi donc, si F, G, H sont les composantes du potentiel vecteur des courants particulaires, la rotation du potentiel vecteur a une valeur bien définie à l'intérieur de la masse de l'aimant; les *curl* tels que $\frac{\partial G}{dz} - \frac{\partial H}{\partial y}$, etc., sont égaux à ce que Maxwell appelle a, b, c, composantes de la force dans une cavité en forme de disque très

Digitized by Google

aplati normal à la ligne d'aimantation. On remarque de même que

$$-\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad -\frac{\partial V}{\partial z}$$

ont des valeurs bien définies en un point de la masse de l'aimant; ces valeurs sont égales à α, β, γ. Mais qu'il s'agisse de masses ou de courants particulaires, la force observée dans une cavité dépend toujours de la forme de la cavité.

Ce paragraphe gagne en simplicité par l'emploi des notations vectorielles. Résumons-le.

Soit I l'intensité d'aimantation.

Posons

$$\mu = -\operatorname{rot.} I, \qquad \rho = -\operatorname{div.} I, \qquad \tau = -[\nu_i H], \qquad \sigma = -(\nu_i H).$$

A l'extérieur de l'aimant, on a $I = 0$; si donc je pose

$$V = \int \frac{\rho\, d\varpi + \sigma\, dS}{r}, \qquad A = \int \frac{\mu\, d\varpi + \tau\, dS}{r},$$

il vient, d'après la formule de Vaschy,

$$0 = \operatorname{grad.} V + \operatorname{rot.} A.$$

Mais, à l'intérieur de l'aimant, on a pour l'intensité H du champ magnétique (théorie de Sir W. Thomson)

$$H = \operatorname{grad.} V.$$

Or, à l'intérieur de l'aimant, dans une cavité ayant la forme d'un cylindre infiniment délié dont les génératrices sont parallèles à H, le champ magnétique se réduit à H, et il en est de même en tout point extérieur à l'aimant; de sorte qu'en vertu de l'égalité précédente, on a

$$H = -\operatorname{rot.} A.$$

Ce qui prouve que les masses vectorielles $-\mu$ et $-\tau$ qui peuvent être représentées par les courants particulaires d'Ampère sont équivalentes aux masses ρ et σ agissant suivant la loi de Coulomb.

Cela posé, à l'intérieur de l'aimant, la formule de Vaschy appliquée au vecteur $-4\pi I$ nous donne

$$-4\pi I = \operatorname{grad.} V + \operatorname{rot.} A$$

Digitized by Google

ou

$$-\text{rot. } A = \text{grad. } V + 4\pi I,$$

ce qui montre que le vecteur — rot. A qui est égal à la rotation du potentiel vecteur des masses $(-\mu, -\tau)$ et qui, à l'extérieur de l'aimant, est égal à H, devient égal à B à l'intérieur de l'aimant.

Digitized by Google

CHAPITRE VI.

THÉORIE DE L'INDUCTION.

Travail élémentaire produit dans le déplacement d'un circuit par les forces électrodynamiques. — On a, d'une façon générale,

$$\delta\mathfrak{T} = \Sigma\, 4\pi\, \mathrm{I}\, \delta_e \Phi,$$

$\delta_e\Phi$ étant la variation du vecteur $\frac{\mathrm{K}'\alpha}{4\pi}$, $\frac{\mathrm{K}'\beta}{4\pi}$, $\frac{\mathrm{K}'\gamma}{4\pi}$ qui entre par la face négative du diaphragme bordé par le courant I, l'indice e indique qu'il s'agit d'une variation due à un déplacement, à un changement dans l'espace (e). S'il s'agissait d'une variation dans le temps, nous écririons $\delta_t\Phi$.

Reprenons la démonstration. Cette formule résulte de l'équation précédemment établie

$$\delta\mathfrak{T} = \int \mathrm{K}' \begin{vmatrix} u & v & w \\ \delta x & \delta y & \delta z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} d\varpi;$$

mais, dans la masse du conducteur, on a : 1° loi de Kirchhoff,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

2° loi d'Ohm,

$$u = -c\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x},$$

$$v = -c\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y},$$

$$w = -c\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}.$$

Sur la surface $\mathrm{V} = \mathrm{V}_1$, envisageons un petit élément $d\omega$; du contour de cet élément part un faisceau de lignes de flux ayant pour

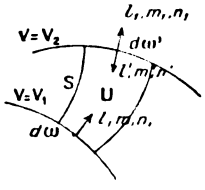
Digitized by Google

équations différentielles

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w},$$

lesquelles forment un tube ou solénoïde.

Fig. 68.



Limitons ce tube par une section faite par la surface $V = V_2$. Le tube est découpé suivant une section droite $d\omega'$.

On aura, d'après une formule connue,

$$\int_S (lu + mv + nw)\, dS + \int_U \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) d\varpi = 0,$$

U étant le volume du tube, S la surface qui enveloppe le volume U, l, m, n les cosinus directeurs de la normale à la surface S dirigée vers l'intérieur du volume U. Ici, la surface S se compose : 1° de la surface latérale du tube, le long de laquelle on a

$$lu + mv + nw = 0;$$

2° des deux bases $d\omega$ et $d\omega'$.

Il reste donc

$$(lu + mv + nw)\, d\omega + (l'u' + m'v' + n'w')\, d\omega' = 0$$

ou

$$(lu + mv + nw)\, d\omega = (l_1 u' + m_1 v' + n_1 w')\, d\omega',$$

$l_1 m_1 n_1$ étant les cosinus directeurs de la normale dirigée en sens contraire de $l'm'n'$.

lmn, $l_1 m_1 n_1$ sont alors les cosinus directeurs de la normale aux surfaces équipotentielles dirigée toujours vers les potentiels décroissants.

Soient i le vecteur qui a pour composantes u, v, w et qui est normal à $d\omega$; i' le vecteur qui a pour composantes u', v', w' et qui est

Digitized by Google

normal à $d\omega'$. Il viendra

$$i\,d\omega = i'\,d\omega'.$$

Nous pouvons donc décomposer le volume occupé par les courants en une série de tubes de flux, le long desquels le flux se conserve.

Soit ds l'élément de longueur du tube, on aura $d\omega\,ds = d\varpi$, et l'intégrale $\delta\mathfrak{T}$ pourra s'écrire

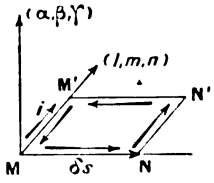
$$\delta\mathfrak{T} = K'\int i\,d\omega \int \begin{vmatrix} l & m & n \\ \delta x & \delta y & \delta z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} ds;$$

or, comme d'ailleurs nous l'avons déjà vu, le déterminant

$$\begin{vmatrix} l\,ds & m\,ds & n\,ds \\ \delta x & \delta y & \delta z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

est le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs ds, δs, $H(\alpha, \beta, \gamma)$ comme arêtes, et il est positif si ces vecteurs forment un trièdre de même signe que Ox, Oy, Oz.

Fig. 69.



Si le diaphragme qui s'appuie sur le courant élémentaire MM' s'accroît de la maille MNN'M', le courant y circulera dans le sens MNN'M'M et, par suite, le déterminant considéré représentera le flux du vecteur $H(\alpha, \beta, \gamma)$ entrant par la face négative; soit Φ d'une façon générale, le flux du vecteur $\frac{K'H}{4\pi}$ à travers le diaphragme Σ qui s'appuie sur le tube considéré; on aura donc, en sommant par rapport à tous les tubes de flux de courant,

$$\delta\mathfrak{T} = \Sigma\, 4\pi I\, \delta_e \Phi. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Application du principe de la conservation de l'énergie. — Soient

Digitized by Google

V_1 et V_2 les armatures d'un condensateur, δq la quantité d'électricité dont il se décharge à travers un circuit extérieur.

Supposons que nous voulions décharger le condensateur d'une quantité d'électricité égale à δq en un temps égal à δt, tout en maintenant la différence de potentiel $V_2 - V_1$ constante; il faut pour cela que nous disposions de deux variables indépendantes qui sont en l'espèce : d'une part, la capacité C du condensateur (on peut faire varier la distance ou la surface des armatures, ce sera ce dernier cas si une armature cylindrique s'enfonce concentriquement suivant l'axe dans une autre armature cylindrique); d'autre part, la charge q de ce condensateur (on peut, en effet, à l'aide du replenisher fournir au condensateur des quantités d'électricité suivant une loi déterminée).

L'énergie emmagasinée dans le condensateur est

$$\frac{1}{2} V q = \frac{1}{2} C V^2.$$

La variation de l'énergie à potentiel constant qui résulte de la variation de charge du condensateur est $\frac{1}{2} V \delta q$ et celle qui résulte de la capacité du condensateur est

$$\frac{1}{2} V^2 \delta C = \frac{1}{2} V \delta q,$$

puisque

$$\delta q = V \delta C.$$

La variation totale d'énergie électrostatique est donc $V \delta q$.

Le condensateur ainsi envisagé jouera donc exactement le rôle d'une pile à force électromotrice constante

$$V_2 - V_1 = E.$$

Considérons donc un certain nombre de circuits, dans lesquels sont intercalées des forces électromotrices analogues à celles du condensateur envisagé précédemment. L'énergie électrostatique totale perdue pendant le temps dt par le système sera $\Sigma E \delta q$ et la chaleur de Joule dégagée pendant le même temps dt sera $\Sigma R I^2 dt$. Si les circuits se déplacent, les forces électrodynamiques produisent un travail

$$\delta \mathfrak{T} = \pi I \delta_e \Phi.$$

Digitized by Google

Si donc l'énergie électrostatique perdue se retrouve sous forme de chaleur et de travail électrodynamique, on aura

$$\Sigma E\,\delta q \equiv \Sigma r I^2\,dt + \delta \mathfrak{T}.$$

Cette application du principe de la conservation de l'énergie est légitime, si nous supposons qu'il n'y a pas en jeu d'autres énergies que celles considérées. On pourrait, il est vrai, faire les deux objections suivantes :

D'abord, nous ne tenons pas compte de l'énergie magnétique; mais les intensités restant constantes, l'énergie magnétique ne subit pas de variation. Elle ne pourrait en subir que si un courant constant donnait lieu à un flux permanent d'énergie magnétique rayonnant vers l'espace infini, mais alors la loi de Faraday, que nous avons déduite du principe de la conservation de l'énergie, devrait ne pas être exacte, puisque nous n'avons pas tenu compte de ce rayonnement. Cela revient à dire qu'un moteur électrique en mouvement permanent n'accumule pas ou n'absorbe pas des quantités d'énergie magnétique indéfiniment croissantes.

En second lieu, en ce qui concerne la chaleur de Joule, son dégagement en un point paraît constituer un phénomène purement local conditionné par la résistance spécifique de l'élément de volume et l'intensité du vecteur densité de courant. Elle ne saurait donc être modifiée, en raison de l'état de repos ou de mouvement des parties du circuit éloignées du point considéré.

Enfin, remarquons que nous pouvons diminuer à notre gré les intensités I, en augmentant convenablement les résistances R de façon à rendre infiniment petite la chaleur de Joule ΣRI^2 dégagée par unité de temps et faire en sorte que le champ magnétique dans lequel se déplacent les courants ne soit pas troublé par la présence de ceux-ci; on pourra cependant, dans ces conditions, observer des forces électromotrices de grandeur quelconque. On peut alors considérer le champ magnétique et son énergie comme invariables. C'est le cas de courants infiniment petits qu'on déplace dans le champ dû à des aimants permanents.

Néanmoins, il est toujours délicat d'appliquer le principe de la conservation de l'énergie, autrement que comme moyen d'investigation. Si l'expérience confirme les déductions qu'on en a tirées, c'est que toutes les énergies à mettre en balance ont été envisagées; mais,

Digitized by Google

si l'expérience vient les contredire, on admettra, non que le principe cesse de s'appliquer, car il a été trop souvent vérifié pour être mis en doute, mais qu'il y a lieu de rechercher quelque nouvelle forme d'énergie qui trouvera justement sa définition dans l'énoncé des conditions expérimentales qui ont semblé mettre la loi en défaut.

Nous admettrons donc, en définitive, comme véritable base des lois de l'induction, les expériences de Faraday et de Félici.

Quoi qu'il en soit, nous admettrons l'équation

$$\Sigma E\,\delta q = \Sigma rI\,\delta q + \Sigma 4\pi I\,\delta_e\Phi, \qquad \text{puisque} \qquad \delta q = I\,dt.$$

Les δq des divers circuits sont indépendants les uns des autres: il vient, pour chacun d'eux,

$$E = rI + 4\pi\frac{\delta_e\Phi}{\delta t},$$

où $\frac{\delta_e\Phi}{\delta t}$ est le flux du vecteur $\frac{K'h}{4\pi}$ coupé dans l'unité de temps.

On peut considérer $-4\pi\frac{\delta_e\Phi}{\delta t}$ comme une force électromotrice d'induction; en effet, la force électromotrice totale est toujours

$$\int (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = rI,$$

P, Q, R étant les composantes du champ électrostatique en un point infiniment voisin du conducteur, et comme on n'a plus $rI = E$, mais

$$rI = E - 4\pi\frac{\delta_e\Phi}{\delta t},$$

on en conclut que rI est la résultante des deux forces E et $-4\pi\frac{\delta_e\Phi}{\delta t}$, la seconde étant justement définie par l'égalité précédente.

Caractère local de la force électromotrice d'induction. — La valeur de la f. e. m. d'induction est indépendante de la f. e. m. fixe qui agit dans le circuit; l'expérience montre qu'elle est la même quand cette dernière est nulle, c'est-à-dire quand le circuit est un simple conducteur fermé sur lui-même. Cette f. e. m. a un caractère tout à fait local. La partie mobile du circuit peut, en effet, être réduite à un élément et la f. e. m. est indépendante de la nature de la substance conductrice constituée par cet élément. Nous sommes amenés ainsi à

Digitized by Google

considérer que la f. e. m. élémentaire ne dépend que du mouvement relatif local entre le flux magnétique et l'élément de courant. Si donc le conducteur reste immobile, tandis que des aimants se déplacent, on admettra la même loi de f. e. m. induite dans chaque élément d'après le flux coupé $\delta_e\Phi$.

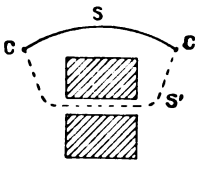
Si maintenant nous admettons que le flux varie avec le temps, le circuit restant immobile, nous aurons encore la même expression de la f. e. m. Mais ici $\delta\Phi$ devra s'écrire $\delta_t\Phi$.

Pour un circuit fermé, nous aurons donc pour expression de la f. e. m. induite totale

$$E = -\frac{d}{dt} K' \int_S (l\alpha + m\beta + n\gamma)\, dS,$$

S étant une surface s'appuyant sur le circuit C (*fig.* 70). Mais d'ail-

Fig. 70.



leurs s'il y a des aimants, on pourra remplacer la surface S par une autre surface S' tracée dans une coupure infiniment étroite dans la substance même de l'aimant. La valeur de l'intensité du champ qu'il y a lieu d'adopter dans l'intégrale relative à S' est celle que Maxwell appelle l'*induction magnétique*, dont les composantes sont a, b, c. Or, d'après ce qu'on sait relativement au potentiel vecteur des courants particulaires, a, b, c sont respectivement égaux aux composantes de la rotation du potentiel vecteur, et l'on voit qu'on pourra écrire

$$\begin{aligned} E &= -\frac{d}{dt}\int_{S'} (la + mb + nc)\, dS' \\ &= -\frac{d}{dt}\int_{S'} \left[l\left(\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}\right) + m\left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z}\right) + n\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x}\right)\right] dS', \\ &= -\frac{d}{dt}\int_C (F\, dx + G\, dy + H\, dz), \end{aligned}$$

F, G, H étant des composantes du potentiel vecteur A, tant des courants finis que des courants particulaires.

Digitized by Google

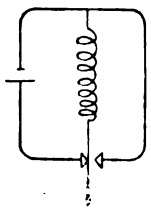
Il en résulte qu'on peut admettre comme f. e. m. élémentaire par unité de longueur la projection du vecteur $-\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$ sur l'élément de circuit C.

Si maintenant le champ magnétique varie et si le circuit se déplace, la f. e. m. élémentaire sera égale à la somme des deux f. e. m. induites dues, l'une au déplacement et l'autre à la variation du champ magnétique avec le temps

$$E = -4\pi \frac{\delta_c \Phi}{\delta t} - \frac{d\mathfrak{A}}{dt}.$$

La première partie de la f. e. m. qui est due aux déplacements du circuit correspond au travail effectué pour produire ces déplacements (énergie électrique engendrée dans une dynamo génératrice, par exemple). La seconde partie de la f. e. m. qui s'applique au circuit immobile correspond à l'énergie magnétique emmagasinée dans le milieu ; aux endroits même où se produit cette f. e. m. il y a variation d'intensité du champ magnétique et, par conséquent, variation d'énergie magnétique (cas des transformateurs).

Fig. 71.



Réalisons l'expérience indiquée dans la figure 71.

Un courant permanent étant établi dans la bobine de self B, interrompons brusquement ce courant en même temps que nous mettons la bobine B en court circuit; l'énergie magnétique due au courant et emmagasinée dans le milieu est alors intégralement transformée en chaleur de Joule dans le second circuit ; nous supposons bien entendu qu'il n'y a pas d'énergie rayonnée dans l'espace infini. Si donc δW est la variation d'énergie magnétique, on a

$$-\delta W = rI^2 \delta t = rI \delta q, \qquad \text{puisque} \qquad \delta q = I \delta t.$$

Digitized by Google

Mais

$$rI\,\delta q = -\frac{4\pi\,\delta\Phi}{\delta t}\,\delta q = -4\pi I\,\delta\Phi,$$

d'où

$$\delta W = \delta \int \frac{K'(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{8\pi}\,d\varpi.$$

Donc l'énergie magnétique par unité de volume sera

$$W = \frac{K'(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{8\pi},$$

si l'on suppose que celle-ci est nulle quand l'intensité du champ magnétique est nulle.

Nous arrivons ainsi à l'expression de l'énergie magnétique comme conséquence dernière de la théorie de l'induction.

Formes diverses de l'expression de l'énergie magnétique. — **1.** D'après la théorie de Maxwell, l'énergie magnétique représente l'énergie cinétique de l'éther.

Quand nous avons affaire à des courants placés dans un milieu qui n'est pas polarisable, on peut faire $K' = 1$ et l'on a alors

$$W = \int \frac{H^2}{8\pi}\,d\varpi$$

pour expression de l'énergie magnétique.

2. Cette expression sera encore valable, dans le cas où l'on a affaire à des aimants permanents et rigides. Ils n'interviennent pas, en effet, par la substance même dont ils sont constitués; on peut, au point de vue de leurs actions, les remplacer par le milieu impolarisable général à condition de faire intervenir à leur place les masses ρ et σ de la théorie de Sir William Thomson. Par conséquent, la même expression subsiste.

3. Dans le cas où l'on a affaire à des masses de fer doux, à un milieu polarisable, alors il y a à considérer, non seulement l'énergie cinétique de l'éther, mais encore l'énergie élastique due à l'orientation des courants particulaires sous l'action des aimants permanents et des courants.

Digitized by Google

En ce cas, reportons-nous à la formule

$$rI\,\delta q = -\tfrac{1}{4}\pi I\,\delta\Phi,$$

relative au travail d'un noyau qui se désaimante. Ici Φ est le flux du vecteur intensité du champ magnétique à travers une fente tracée dans la substance du noyau. On aura donc

$$\delta W = \delta \int \frac{(BH)}{8\pi}\, d\varpi.$$

Mais comme le milieu est polarisable, on écrira

$$B = \mu H,$$

μ étant la perméabilité magnétique.

Donc l'énergie localisée sera, par unité de volume,

$$\frac{\mu H^2}{8\pi}.$$

4. Revenons au cas des aimants permanents.

On peut donner à l'énergie une autre forme, en introduisant l'intensité d'aimantation I.

Soit H_m l'intensité du champ magnétique dû aux aimants, on a l'équation vectorielle

$$H_m = B - \tfrac{1}{4}\pi I;$$

d'où, en notation vectorielle,

$$\int \frac{H_m^2}{8\pi}\, d\varpi = \int \frac{(H_m B)}{8\pi}\, d\varpi - \frac{1}{2}\int (H_m I)\, d\varpi.$$

Mais H_m dérive d'un potentiel et l'on a div. $B = 0$, donc la première intégrale du second membre est nulle (même démonstration que pour $W_{mi} = 0$, au paragraphe suivant) et il reste

$$\int \frac{H_m^2}{8\pi}\, d\varpi = -\frac{1}{2}\int (H_m I)\, d\varpi.$$

L'énergie relative des aimants et des courants est nulle. — Soit α, β, γ, un champ magnétique dû à la fois à des aimants et à des courants. Nous aurons

$$\alpha = X + X',$$
$$\beta = Y + Y',$$
$$\gamma = Z + Z',$$

Digitized by Google

X, Y, Z désignant les composantes du champ magnétique dû aux aimants; X', Y', Z' désignant les composantes du champ magnétique dû aux courants.

L'énergie magnétique est, en supposant K' = 1 pour simplifier,

$$W = \int \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8\pi} d\varpi,$$

car les aimants permanents se comportent comme des masses invariables situées dans un milieu identique au milieu ambiant. Or, on a

$$\alpha^2 = X^2 + X'^2 + 2XX'$$

et deux autres équations analogues.

Donc

$$W = W_m + W_i + W_{mi} = \int \frac{\Sigma X^2 \, d\varpi}{8\pi} + \int \frac{\Sigma X'^2 \, d\varpi}{8\pi} + 2\int \frac{\Sigma XX'}{8\pi} d\varpi.$$

W_m étant l'énergie du champ magnétique dû aux aimants seuls;
W_i étant l'énergie du champ magnétique dû aux courants seuls;
W_{mi} l'énergie relative des aimants et des courants.

Je dis que

$$W_{mi} = 0.$$

En effet,

$$W_{mi} = \int \frac{XX' + YY' + ZZ'}{4\pi} d\varpi;$$

mais comme le champ X, Y, Z dérive d'un potentiel uniforme V, on a

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial V}{\partial z};$$

on aura

$$\int XX' \, d\varpi = \int -\frac{\partial V}{\partial x} X' \, d\varpi = \int V \frac{\partial X'}{\partial x} \, d\varpi - \int V l X' \, dS,$$

et, par suite,

$$4\pi W_{mi} = \int_U V \left(\frac{\partial X'}{\partial x} + \frac{\partial Y'}{\partial y} + \frac{\partial Z'}{\partial z} \right) d\varpi - \int_S V (lX' + mY' + nZ') \, dS.$$

On peut reculer la surface S à l'infini, là où le champ produit par les courants est nul, de sorte que l'intégrale de surface disparaîtra et, comme d'autre part, $\frac{\partial X'}{\partial x} + \frac{\partial Y'}{\partial y} + \frac{\partial Z'}{\partial z}$ est nul en chaque point, puisque

Digitized by Google

le champ magnétique dû aux courants n'est pas produit par des masses de volume ρ, mais seulement par des masses τ, on voit qu'on a

$$W_{mi} = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Comparaison du travail et de l'énergie. — Nous avons trouvé qu'en appelant Φ le flux du vecteur $\frac{a}{4\pi}, \frac{b}{4\pi}, \frac{c}{4\pi}$ à travers une surface s'appuyant sur un courant, le travail élémentaire des forces électrodynamiques, dans le déplacement de ce courant, était

$$\delta\mathcal{E} = 4\pi I \delta_e \Phi.$$

Nous mettons l'indice e, car il s'agit d'une variation de flux produite par un déplacement du circuit.

Considérons, en présence les uns des autres, un système d'aimants et de courants. Nous économiserons beaucoup d'explications en formant les Tableaux synoptiques suivants :

1° *Travail élémentaire.*

$\delta\mathcal{E} = \delta\mathcal{E}_m + \delta\mathcal{E}_{mi} + \delta\mathcal{E}_{im} + \delta\mathcal{E}_i.$	DANS LE CHAMP DES		TOTAL.
	aimants.	courants.	
Travail élémentaire produit par le déplacement des aimants...	$\delta\mathcal{E}_m$	$\delta\mathcal{E}_{mi}$	$\delta_m\mathcal{E}$
Travail élémentaire produit par le déplacement des courants..	$\delta\mathcal{E}_{im}$	$\delta\mathcal{E}_i$	$\delta_i\mathcal{E}$
			$\delta\mathcal{E}$

2° *Flux d'induction magnétique.*

	PAR DÉPLACEMENT du circuit donné dans le champ constant.	PAR VARIATION du champ, le courant restant fixe de position.	TOTAL.
Variations à travers un circuit donné du flux aux aimants...	$\delta_e\Phi_m$	$\delta_t\Phi_m$	$\delta\Phi_m$
Variations à travers un circuit donné du flux aux courants..	$\delta_e\Phi_i$	$\delta_t\Phi_i$	$\delta\Phi_i$
	$\delta_e\Phi$	$\delta_t\Phi$	$\delta\Phi$

Digitized by Google

3° *Énergie.*

			TOTAL.
Énergie	due aux aimants.....	W_m	—
	due aux courants.....	W_i	W
	relative des courants dans le champ des aimants.....	$W_{mi} = W_{im} = 0$	

Cela posé, la formule à démontrer est la suivante :

$$\delta\mathfrak{T} + \delta W = \Sigma\, 4\pi I\, \delta\Phi.$$

En effet, nous avons vu précédemment que l'on avait

$$\delta_i\mathfrak{T} = \Sigma\, 4\pi I\, \delta_e\Phi = \Sigma\, 4\pi I\, \delta_e\Phi_m + \Sigma\, 4\pi I\, \delta_e\Phi_i,$$
$$\delta\mathfrak{T}_{mi} = \Sigma\, 4\pi I\, \delta_t\Phi_m,$$

avec l'indice t, car la variation du flux est due à la variation du champ et non au déplacement du courant I;

$$\delta\mathfrak{T}_m = -\delta W_m,$$

puisqu'un système d'aimants est un système conservatif.

Ajoutons ces trois égalités membre à membre; on en déduit

$$\delta\mathfrak{T} = -\delta W_m + \Sigma\, 4\pi I\, \delta_t\Phi_m + \Sigma\, 4\pi I\, \delta_e\Phi_m + \Sigma\, 4\pi I\, \delta_e\Phi_i$$

ou

$$\delta\mathfrak{T} + \delta W_m = \Sigma\, 4\pi I\, \delta\Phi_m + \Sigma\, 4\pi I\, \delta_e\Phi_i.$$

D'autre part, on a vu que

$$\delta W_i = \Sigma\, 4\pi I\, \delta_t\Phi_i$$

avec l'indice t, car dans le calcul de δW_i nous avons, en effet, coupé le champ d'intégration par des diaphragmes invariables dans l'espace; donc le courant est considéré comme fixe dans le champ. En ajoutant membre à membre les deux dernières équations, on voit qu'on a bien

$$\delta\mathfrak{T} + \delta W = \Sigma\, 4\pi I\, \delta\Phi.$$

On a ainsi l'équation générale qui résume la théorie de l'induction.

Digitized by Google

Cas particulier. — Considérons seulement deux circuits en présence parcourus par des courants respectivement égaux à I_1 et I_2. Nous avons obtenu pour expression de l'énergie magnétique

$$W = \frac{1}{2}\Sigma I(4\pi\Phi).$$

Supposons que le déplacement relatif des circuits I_1, I_2 dépende d'un paramètre φ, alors il y aura, pour un déplacement $d\varphi$, un accroissement d'énergie, qui, si nous supposons les courants constants, sera égal à

$$\delta W = \frac{\delta M_{12}}{\delta\varphi} d\varphi I_1 I_2,$$

et le travail produit par les forces électrodynamiques sera également

$$\delta\overline{\omega} = \Sigma 4\pi I \delta_e \Phi_i = I_1 I_2 \frac{\partial M_{12}}{\partial\varphi} d\varphi.$$

Donc, le travail produit par les forces électrodynamiques est égal à l'accroissement de l'énergie magnétique.

Si donc le circuit (1) est fermé sur lui-même et que le circuit (2) soit alimenté par une pile, l'énergie fournie par la pile devra subvenir par parties égales :

1° A l'accroissement de l'énergie magnétique;
2° Au travail des forces électrodynamiques.

Application des lois de l'induction aux machines dynamo-électriques. — Considérons le système formé par un électro-aimant inducteur fixe, faisant office d'aimant permanent, et un électro-aimant mobile, constitué par une masse de fer doux et par un circuit dans lequel il s'agit de déterminer la force électromotrice d'induction.

Ce cas donne lieu à une sorte de paradoxe, qui est encore plus singulier lorsque l'on considère un circuit induit consistant en des barres de cuivre logées dans des trous. D'une part, on cherche quelle est la force F qui agit sur les barres, on a FHIL, I étant l'intensité du courant qui les parcourt, L leur longueur, H le champ magnétique dans la cavité en forme de trou; cette intensité H du champ est beaucoup plus faible que celle du champ dans l'entrefer que

Digitized by Google

j'appellerai B. Si l'induit tourne à la vitesse V, le travail de la force F est

$$FV\,dt = HIVL\,dt.$$

C'est le flux réellement coupé par les barres. Or la force électromotrice d'induction est égale à BLV.

Si l'on se reporte à l'expression de la force électrique, on voit qu'elle comprend trois termes : le premier qui dépend du potentiel électrostatique n'est pas en jeu ici; le second correspond au flux coupé dans le déplacement de la matière, c'est celui que nous venons d'indiquer; le troisième correspond à la variation du flux avec le temps. Il y en aurait même analytiquement un quatrième à considérer, s'il pouvait exister du magnétisme vrai, mais ce n'est pas le cas, puisqu'on a div. $B = 0$ et que, par suite de cette distribution solénoïdale en tubes fermés sur eux-mêmes à distance finie ou infinie, la quantité totale de magnétisme vrai qui traverse le diaphragme qui s'appuie sur le circuit est égale à zéro identiquement.

En résumé, la différence s'explique par le terme relatif à la variation avec le temps. Mais l'image d'un flux coupé présente aux yeux des techniciens une idée beaucoup plus nette; c'est ainsi que dans un transformateur, on parlera encore de flux coupé; on imagine facilement qu'on voit les lignes de force magnétique d'un diagramme et qu'on les regarde s'espacer lorsque l'intensité du champ diminue. On remplace ainsi par un mouvement dans l'espace une variation qui, en réalité, s'opère dans le temps, car aucune substance n'est liée à ces lignes de force. On peut alors parler dans tous les cas de flux coupé. Comme l'intensité du champ est égale à H au point où il est coupé par la barre de cuivre, il faut, pour obtenir le flux coupé dans le sens nouveau que nous venons de définir, faire intervenir non plus la vitesse réelle V de la matière, mais bien la vitesse relative fictive $V' > V$ des lignes de flux et des barres d'induit. Le paradoxe est alors résolu et expliqué.

THÉORIE DE L'INDUCTION DE MAXWELL.

INTRODUCTION.

Équations de la dynamique pour un système à liaisons. — *Méthode de Thomson et Tait.* — 1° Soient $q_1, q_2, \ldots, q_n$ les coordonnées

Digitized by Google

généralisées de Lagrange. Ces paramètres déterminent complètement la configuration du système et sont indépendants; soient v_1, v_2, ..., v_n leurs dérivées par rapport au temps, c'est-à-dire les vitesses.

Le travail produit par les forces extérieures appliquées au système étant W, le travail virtuel sera

$$\delta W = \Sigma Q_i \delta q_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Les quantités Q_i sont les forces généralisées.

2° Soit T l'énergie cinétique du système, on aura

$$2T = \Sigma a_{ij} v_i v_j \qquad \begin{pmatrix} i = 1 \text{ à } n \\ j = 1 \text{ à } n \end{pmatrix} \qquad (a_{ij} = a_{ji}).$$

L'augmentation d'énergie cinétique due au travail des forces de l'époque o à l'époque t sera

$$\delta T = \int_0^t \Sigma Q \delta q = \Sigma \int_0^t Q v \, dt.$$

Si le temps t est très court, les quantités Q ne changent pas de signe, on peut appliquer le théorème de la moyenne, soit v_m la vitesse moyenne entre les temps o et t, il vient

$$\delta T = \Sigma v_m \int_0^t Q \, dt.$$

Si l'impulsion $\int_0^t Q \, dt$ s'opère dans un temps t très court et si elle est très petite, la vitesse v_m n'est autre que la vitesse actuelle. Soit

$$\int_0^t Q \, dt = \delta p,$$

il vient

$$\delta T = \Sigma v \, \delta p.$$

Cette formule peut s'obtenir plus directement comme suit :

Appelons grandeur d'un choc, l'accroissement de la quantité de mouvement due au choc, et impulsion, l'intégrale de temps de la force. Considérons un choc de durée t appliqué de façon à agir directement sur la variable q du système à liaisons. Soient U la vitesse initiale de la coordonnée q, u sa vitesse au bout du temps θ pendant la durée du choc, V la vitesse finale après le choc, Q la force

Digitized by Google

qui agit pendant le choc dans la direction et dans le sens de q, $i = \int_0^\theta Q\,dt$ l'impulsion au temps θ, $I = \int_0^t Q\,dt$ l'impulsion finale. Nous admettrons, comme un principe, que l'accroissement de la vitesse au temps θ doit être proportionnelle à l'impulsion à cette époque, c'est-à-dire à i; et, si nous désignons par M une constante caractéristique du système, fonction des masses et des liaisons, nous aurons, respectivement au bout des temps θ et t,

$$u = U + \frac{i}{M}, \qquad V = U + \frac{I}{M}.$$

Le travail de la force Q sera

$$\delta T_q = \int_0^t Q\left(U + \frac{i}{M}\right) dt = UI + \frac{1}{2}\frac{I^2}{M} = \frac{1}{2}(U + V)I.$$

Si l'impulsion est très petite, on peut écrire $I = \delta p$ et mettre v à la place de la vitesse moyenne, d'où la formule considérée.

3° Soient $\delta p_{1i}, \delta p_{2i}, \ldots, \delta p_{ni}$ les impulsions nécessaires pour que la vitesse v_i devienne $v_i + \delta v_i$ sans que les autres vitesses soient modifiées; on aura

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial v_i}\delta v_i.$$

Mais, d'après la formule précédente,

$$\delta T = \Sigma v_k\,\delta p_{ki} \qquad (k = 1 \text{ à } n);$$

d'où

$$\frac{\partial T}{\partial v_i} = \Sigma v_k \frac{\delta p_{ki}}{\delta v_i}.$$

Mais on a

$$\frac{\partial T}{\partial v_i} = \Sigma a_{ik} v_k \qquad (k = 1 \text{ à } n);$$

d'où

$$a_{ik} = \frac{\delta p_{ki}}{\delta v_i} \qquad \text{ou} \qquad \delta p_{ki} = a_{ik}\,\delta v_i.$$

4° Donc, les impulsions nécessaires pour porter le système considéré, d'une façon instantanée, sans que sa configuration ait le temps de changer, de l'état de repos à celui dans lequel les vitesses

Digitized by Google

sont $v_1, v_2, \ldots, v_n$, seront

$$p_k = \sum_{i=1}^{i=n} p_{ki} = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ik} v_i = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ki} v_i = \frac{\partial T}{\partial v_k}.$$

5° Cette formule donne donc

$$p_k = \sum_{j=1}^{j=n} a_{kj} v_j \qquad (a_{kj} = a_{jk});$$

d'où, en résolvant et ayant égard à la symétrie,

$$v_j = \sum_{k=1}^{k=n} A_{jk} p_k \qquad (A_{jk} = A_{kj}).$$

6° D'après le théorème des fonctions homogènes, on a

$$2T = \sum \frac{\partial T}{\partial v_k} v_k \qquad (k = 1 \text{ à } n)$$

ou

$$2T = \Sigma p_k v_k.$$

On en déduit, en considérant T comme fonction des p et en le rappelant par un indice,

$$2\frac{\partial T_p}{\partial p_k} = v_k + \Sigma p_i \frac{\partial v_i}{\partial p_k} \qquad (i = 1 \text{ à } n).$$

Mais, d'après le théorème des fonctions homogènes, on a

$$\sum_i p_i \frac{\partial v_i}{\partial p_k} = v_k;$$

d'où

$$\frac{\partial T_p}{\partial p_k} = v_k.$$

7° La variation complète de T est

$$\delta T_p = \sum \left(\frac{\partial T_p}{\partial p} \delta p + \frac{\partial T_p}{\partial q} \delta q \right).$$

Or, on a

$$\delta p = \frac{dp}{dt} dt, \qquad \frac{\partial T_p}{\partial p} = v, \qquad v\, dt = \delta q;$$

Digitized by Google

d'où

$$\frac{\partial T_p}{\partial p}\delta p = \frac{\partial T_p}{\partial p}\frac{dp}{dt}dt = \frac{d_p}{dt}v\,dt = \frac{dp}{dt}\delta q.$$

Donc

$$\delta T = \sum\left(\frac{dp}{dt} + \frac{\partial T_p}{\partial q}\right)\delta q.$$

Mais cet accroissement d'énergie cinétique est dû au travail des forces extérieures; d'où

$$\frac{dp}{dt} + \frac{\partial T_p}{\partial q} = Q.$$

8° Mais nous avons déjà prouvé, dans le paragraphe du Chapitre I consacré aux systèmes de conducteurs isolés dans un champ électrostatique que l'on a

$$\frac{\partial T_p}{\partial q} = -\frac{\partial T_v}{\partial q}, \qquad p = \frac{\partial T_v}{\partial v};$$

d'où, pour les équations de la dynamique,

$$\frac{dp}{dt} - \frac{\partial T_v}{\partial q} = Q,$$

$$p = \frac{\partial T_v}{\partial v}.$$

Ce sont les équations de Lagrange.

Méthode de Maxwell. — Le mode de raisonnement employé par Maxwell pour obtenir les équations de Lagrange diffère un peu du précédent.

Il s'agit d'abord de définir les quantités de mouvement. Pour cela, introduisons les impulsions. On appelle impulsion l'expression

$$\lim \int_0^t F\,dt, \qquad \text{pour } t = 0,$$

lorsque la force F augmente indéfiniment, tandis que la durée de son action tend vers zéro, cette augmentation de la force F' étant réglée sur la diminution du temps d'action, de façon à produire un effet donné, qui consistera à porter le système de son état de repos à un état donné du mouvement, sans que sa configuration soit modifiée.

Admettons trois variables q_1, q_2, q_3; soient v_1, v_2, v_3 les vitesses. Appliquons les impulsions correspondant aux variables q_1, q_2, q_3

Digitized by Google

qui seraient susceptibles de porter de o à v_1 la vitesse de la variable q_1 sans modifier les vitesses de q_2 et de q_3 supposées égales à zéro: soient $a'v_1$, $b'v_1$, $c'v_1$ ces impulsions ; appliquons de même les impulsions $a''v_2$, $b''v_2$, $c''v_2$ susceptibles de faire acquérir à la variable q_2 la vitesse v_2, les vitesses de q_1 et de q_3 restant égales à zéro; appliquons enfin les impulsions $a'''v_3$, $b'''v_3$, $c'''v_3$, qui donnent à q_3 la vitesse v_3, les vitesses de q_1 et de q_2 restant égales à zéro. Superposons l'action de ces diverses impulsions, on aura pour la variable q_1 une impulsion p_1, pour la variable q_2 une impulsion p_2, pour la variable q_3 une impulsion p_3, et les vitesses obtenues seront v_1, v_2 et v_3 pour q_1, q_2 et q_3. On aura alors :

$$\begin{aligned} p_1 &= a'v_1 + a''v_2 + a'''v_3, \\ p_2 &= b'v_1 + b''v_2 + b'''v_3, \\ p_3 &= c'v_1 + c''v_2 + c'''v_3. \end{aligned}$$

Ces impulsions p_1, p_2 et p_3 sont ce que Maxwell appelle les *quantités de mouvement* du système relatives aux variables q_1, q_2 et q_3; mais cette conception que les quantités de mouvement sont susceptibles d'être produites par des impulsions instantanées agissant sur le système au repos n'est introduite que pour définir les quantités de mouvement, celles-ci, bien entendu, dépendant exclusivement de l'état de mouvement instantané du système et non de la manière dont on l'a mis en mouvement.

Cela posé, nous verrions, comme précédemment dans l'exposé de la méthode de Thomson et Tait, que l'accroissement de l'énergie cinétique peut être mis sous la forme

$$\delta T = \Sigma v\, \delta p.$$

Or, l'état du système est complètement défini quand on donne les variables q et les quantités de mouvement p. Désignons par T_p l'énergie cinétique quand on la considère comme fonction des quantités indépendantes q et p.

La variation complète de T_p est

$$\delta T_p = \sum \frac{dT_p}{dp}\, \delta p + \sum \frac{dT_p}{dq}\, \delta q.$$

Mais ce dernier terme disparaît quand les impulsions sont instantanées, parce que la configuration du système ne change pas

Digitized by Google

pendant la durée égale à zéro de l'impulsion, d'où

$$\delta q = 0.$$

En comparant à l'équation précédente, on obtient

$$\frac{d\mathrm{T}_p}{dp} = v.$$

Nous sommes arrivés à ce résultat en considérant des impulsions : on évite ainsi d'avoir à considérer les changements de configuration du système. Mais l'état du système est le même qu'il ait été amené du repos à son état actuel de mouvement par des forces progressives ou instantanées. Les variables et les quantités de mouvement ne dépendent que de l'état actuel du système et non de son histoire antérieure. Donc, la dernière équation obtenue subsiste d'une façon générale.

Comme au paragraphe 7° de l'exposé précédent, on a donc

$$\frac{dp}{dt} + \frac{d\mathrm{T}_p}{dq} = \mathrm{Q}.$$

Il s'agit maintenant d'obtenir l'expression analytique de l'énergie cinétique.

Maxwell y parvient par un procédé analogue à celui qu'il a employé pour avoir l'énergie électrostatique d'un système de conducteurs chargés et isolés placés en présence les uns des autres dans la théorie de l'influence électrostatique.

Soient $p_1, p_2, \ldots$ les quantités de mouvement, et $v_1, v_2, \ldots$ les vitesses à un moment donné; soient $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots$ et $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \ldots$ un autre système de quantités de mouvement et de vitesses tel qu'on ait

$$\mathrm{P}_1 = np_1, \qquad \mathrm{V}_1 = nv_1, \qquad \ldots.$$

Il est évident que les valeurs du système PV sont compatibles entre elles si celles du système pv le sont elles-mêmes.

Faisons donc varier n de δn. Le travail effectué par la force Q_1 est

$$\mathrm{Q}_1 \delta q_1 = \mathrm{V}_1 \delta \mathrm{P}_1 = v_1 p_1 n \delta n.$$

Faisons varier n de 0 à 1, le système est alors amené de l'état de repos à l'état de mouvement (vp) et le travail total nécessaire pour

Digitized by Google

produire ce mouvement est

$$(v_1 p_1 + v_2 p_2 + \ldots) \int_0^1 n\, dn;$$

mais

$$\int_0^1 n\, dn = \frac{1}{2},$$

et le travail dépensé est équivalent à l'énergie cinétique. On a donc

$$T_{pv} = \frac{1}{2}(p_1 v_1 + p_2 v_2 + \ldots),$$

les indices pv indiquant que l'énergie cinétique est exprimée en fonctions des vitesses et des quantités de mouvement.

Par le procédé connu qui a été rappelé dans la théorie de l'influence électrostatique, on démontre qu'on a

$$\frac{\partial T_p}{\partial q} = -\frac{\partial T_v}{\partial q},$$

et l'on obtient les équations de Lagrange.

Application à l'électrodynamique. — C'est à Maxwell que revient l'honneur d'avoir montré la possibilité d'une explication mécanique des phénomènes de l'électrodynamique. Ces actions sont de deux sortes : d'une part, les réactions du champ mettent en jeu des forces mécaniques qui agissent sur la matière siège du courant; d'autre part, les variations du champ qui résultent des modifications qui se produisent avec le temps ou de celles qui viennent du mouvement des circuits provoquent la création de forces électromotrices.

Nous considérons un certain nombre de courants en présence les uns des autres.

L'état du système est complètement défini par deux catégories de variables. Les unes déterminent la configuration sensible du système, ce sont les paramètres qui fixent les coordonnées des divers points matériels. Les autres déterminent la configuration actuelle d'un mécanisme supposé, d'un mécanisme caché dont l'état est fonction des grandeurs électriques. Ce mécanisme s'étend dans tout l'espace qui sépare les courants les uns des autres, puisque les phénomènes

Digitized by Google

d'attraction ou de répulsion, ainsi que ceux d'induction, nous prouvent qu'il y a entre eux des actions mutuelles à distance.

On peut imaginer, par exemple, que le courant est dû à des électrons qui circulent dans les différents conducteurs en réagissant tout autour d'eux sur le milieu par des liaisons plus ou moins compliquées. Parmi ces liaisons, nous devons en particulier distinguer l'équation de continuité qui exprime que le courant qui parcourt un conducteur se comporte comme un fluide incompressible. Dès lors, si nous nous bornons à envisager des conducteurs linéaires, la position d'une molécule de ce fluide est entièrement déterminée par la quantité d'électricité y qui a traversé une section droite particulière du conducteur correspondant, depuis l'époque arbitrairement choisie comme origine des temps. On peut donc admettre que la position des électrons et, par suite, celle de toutes les autres pièces cachées du mécanisme dont dépend l'état du champ ne sont fonctions que des y. Dans le cas de circuits composés chacun d'un réseau de conducteurs, les équations de continuité relatives à chaque sommet permettent de réduire les quantités y au nombre minimum, les paramètres restant étant indépendants.

L'énergie du système invisible sur lequel nous portons notre attention est distincte des diverses autres formes d'énergie que nous avons considérées jusqu'à présent.

Soit, par exemple, un circuit parcouru par un courant ; soit I l'intensité. Ce circuit est le siège d'un dégagement de chaleur, comme l'indique la loi de Joule, mais ce dégagement, étant proportionnel à la résistance et à I^2, peut être rendu peu important si la conductibilité est parfaite ; de même, l'espace qui environne le circuit est le siège d'un champ électrostatique, mais l'énergie ainsi emmagasinée peut être rendue négligeable si les capacités chargées par le courant sont réduites au minimum ; enfin, si une pile est intercalée dans le circuit, elle intervient par son énergie chimique ; mais si l'on enlève instantanément la pile du circuit en la remplaçant par une résistance égale à sa résistance intérieure, l'intensité du courant, au moment même de la suppression, ne sera pas altérée, et dans la période de courant variable qui suit, l'énergie chimique de la pile n'entre plus en jeu, et cependant le courant est susceptible de produire un travail plus ou moins important dans une machine réceptrice. Il en résulte, qu'indépendamment des énergies calorifiques, électriques, chimiques, etc.,

Digitized by Google

il y a une espèce particulière d'énergie attachée au courant électrique; si l'on admet l'équivalence des courants et des aimants, et l'identité de la force magnétique produite en un point du champ soit par les uns, soit par les autres, on n'hésitera pas à donner le nom d'*énergie magnétique* à la forme particulière d'énergie que nous envisageons.

Déjà les variations de l'énergie magnétique ont été mises en évidence grâce aux travaux mécaniques effectués dans les déplacements relatifs de deux systèmes d'aimants, mais il est difficile d'en déduire une expression correcte de l'énergie magnétique elle-même, parce que, les aimants étant permanents, on se trouve en dernière analyse en présence de particules magnétiques isolées dont il faudrait pouvoir évaluer l'énergie intrinsèque. Or, en électrostatique, on ne rencontre pas la même difficulté, parce que le replenisher, par exemple, permet, en partant de quantités d'électricité infiniment petites, d'arriver à des charges aussi grandes qu'on veut en utilisant simplement le travail mécanique.

C'est de même en faisant appel aux phénomènes d'induction qu'on peut, au moyen d'une dynamo génératrice autoexcitatrice, créer avec du travail mécanique une quantité aussi grande qu'on veut d'énergie magnétique.

C'est donc la théorie de l'induction et non celle du magnétisme qu conduit à l'expression de l'énergie magnétique; et ce sera l'un des résultats que nous donnera la théorie de Maxwell.

Nous allons donc appliquer les équations générales de la dynamique. Il importe alors de se rendre clairement compte de ce que représentent les variables Q, qui désignent les forces généralisées.

Le système possédera une certaine quantité d'énergie électrique, que, pour la distinguer de l'énergie électrodynamique, nous nommerons l'énergie électrostatique W_E; en appliquant au système des forces convenables, on peut accroître son énergie électrostatique et l'on aura

$$\delta W_E = \Sigma X \delta y,$$

en appelant δy la quantité d'électricité mise en jeu dans chaque circuit; la quantité X devra compter au nombre des forces extérieures et nous ne parlerons explicitement pas de l'énergie du champ électrique.

Digitized by Google

De même, le circuit est le siège d'un dégagement de chaleur J par unité de temps et, par suite, dans le temps dt, d'une quantité de chaleur

$$J\,dt = -\,\Sigma Y\,\delta y,$$

cédée par le système et *empruntée* aux énergies diverses qui peuvent être emmagasinées en lui, d'où le signe —. La force —Y sera considérée comme une force extérieure agissant sur le système ; Y sera une force résistante.

Nous introduirons dans le calcul cette force —Y pour tenir compte du dégagement de chaleur qui s'effectue conformément à la loi de Joule, et nous ne parlerons pas explicitement de cette dissipation d'énergie calorifique. On traiterait semblablement les diverses autres formes d'énergie chimique, mécanique, etc.

Les énergies qu'il nous reste à considérer sont donc l'énergie cinétique de la matière sensible et l'énergie due au champ magnétique produit par le courant.

Cette énergie électrodynamique ou magnétique est soit de l'énergie potentielle, soit de l'énergie cinétique. Dans le premier cas, elle dépend des positions relatives des points d'application des forces ; dans le second cas, elle dépend du mouvement de quelque substance. Or Faraday a été amené à considérer l'existence d'un courant comme un phénomène dû à un mouvement progressif et non à un simple arrangement. Si nous suivons sa manière de voir, l'énergie du courant est donc cinétique.

Soit donc un système de courants consistant en un certain nombre de circuits conducteurs dont la forme et la position sont déterminées par les valeurs d'un système de variables $x_1, x_2, \ldots$ en nombre égal au nombre des degrés de liberté du système. Nous considérons simultanément l'énergie cinétique due aux courants et nous introduisons l'autre système de variables, les variables $y_1, y_2, \ldots$, qui caractérisent le mouvement de l'électricité et qui déterminent ce mouvement ainsi que les autres mouvements qui en dépendent.

L'énergie cinétique T sera une fonction homogène des carrés et des doubles produits de toutes les vitesses des deux sortes de coordonnées généralisées. Nous pouvons donc diviser T en trois parties ; l'autre T_m ne comporte que les vitesses des coordonnées x, l'autre T_e ne contient que les vitesses de coordonnées y, la troisième T_{me} est

Digitized by Google

un ensemble de termes dont chacun contient le produit de la vitesse d'une coordonnée x par la vitesse d'une coordonnée y. Nous avons donc

$$T = T_m + T_e + T_{me},$$

avec

$$T_m = \frac{1}{2}(x_1, x_1)x_1'^2 + \ldots + (x_1, x_2)x_1'x_2' + \ldots,$$

$$T_e = \frac{1}{2}(y_1, y_1)y_1'^2 + \ldots + (y_1, y_2)y_1'y_2' + \ldots,$$

$$T_{me} = (x_1, y_1)x_1'y_1' + \ldots.$$

Les coefficients y n'entrent pas dans les coefficients, car si l'on maintient les intensités constantes et les conducteurs au repos, le champ demeure invariable, bien que les y varient ; or les y' sont alors constants, donc les y ne peuvent entrer dans T.

Soit X' la force extérieure généralisée correspondant à la coordonnée x, qui est au nombre de celles qui déterminent la forme et la position des circuits conducteurs. C'est une force au sens ordinaire du mot ; elle tend à produire un changement de position. Elle est donnée par l'équation

$$X' = \frac{d}{dt}\frac{dT}{dx'} - \frac{dT}{dx}.$$

Nous pouvons considérer cette force comme la somme de trois parties, correspondant aux trois parties dans lesquelles se divise l'énergie cinétique du système et nous pouvons les distinguer par les mêmes indices. Soit donc

$$X' = X'_m + X'_e + X'_{me};$$

X'_m dépend des considérations dynamiques ordinaires, nous ne nous en occupons pas.

Comme T_e ne contient pas x', le premier terme de X'_e est nul et sa valeur se réduit à

$$X'_e = -\frac{dT_e}{dx}.$$

Voilà l'expression de la force mécanique qu'il faut appliquer au conducteur pour équilibrer la force électromagnétique ; elle est donc mesurée par la dérivée chargée de signe de l'énergie électrocinétique pure due à la variation de la coordonnée x. La force électromagnétique X_e, qui met en jeu cette force mécanique extérieure, est égale et opposée à X'_e et a pour mesure la dérivée de l'énergie électrociné-

Digitized by Google

tique par rapport à x. La valeur de X'_e, dépendant des carrés et des doubles produits des intensités, reste la même si l'on renverse le sens de tous les courants.

La troisième partie de X′ est

$$X'_{me} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dT_{me}}{dx'}\right) - \frac{dT_m}{dx}.$$

La quantité T_{me} ne contient que des produits de la forme $x'y'$, de sorte que $\frac{dT_{me}}{dx'}$ est une fonction linéaire des intensités des courants y'. Le premier terme, par conséquent, ne dépend que des dérivées des intensités et indique une force mécanique appliquée aux conducteurs, qui se réduit à zéro si les courants sont constants et qui est positive ou négative suivant que les intensités sont croissantes ou décroissantes.

Le second terme dépend non des dérivées des intensités, mais de leurs valeurs actuelles. C'est une fonction linéaire des intensités qui change de signe avec elles. Chaque terme comprend un facteur en x', il s'annule donc pour un conducteur au repos.

Il y a aussi des termes qui proviennent de la dérivation par rapport au temps des coefficients des y' dans $\frac{dT_{me}}{dx}$; la même remarque s'applique à eux.

Nous pouvons donc faire porter nos recherches sur ces termes séparément. Si les conducteurs sont au repos, nous n'avons affaire qu'au premier terme; si les courants sont constants, nous n'avons affaire qu'au second.

Maxwell prend une bobine circulaire avec un grand nombre de tours de fils, il la suspend par un fil vertical très fin, le plan des spires étant horizontal et la bobine étant libre de tourner autour d'un axe vertical, soit dans la même direction que le courant dans la bobine, soit en sens contraire. Le courant est envoyé dans la bobine par le fil de suspension, il traverse l'enroulement, il en sort par un fil vertical dans le prolongement du fil de suspension; ce fil plonge dans le mercure et l'on ferme le circuit. On a soin de compenser la composante horizontale du magnétisme terrestre. Un miroir vertical est attaché à la bobine pour manifester son mouvement azimutal.

On fait passer le courant à travers la bobine dans le sens NESO. Si l'électricité était un fluide comme l'eau, au moment de sa mise en

Digitized by Google

mouvement, la réaction ferait tourner la bobine dans le sens OSEN et le miroir l'indiquerait. En arrêtant le courant brusquement, on aurait l'effet inverse. On n'a pas observé de phénomène de ce genre; toutes les actions mécaniques agissant sur un circuit dépendent des intensités, non de leurs dérivées par rapport au temps et elles restent les mêmes quand on change le sens de tous les courants.

Si cependant le mouvement de l'électricité ressemble d'une façon quelconque à celui d'une matière ordinaire, les termes en T_{me} doivent exister et présenter les caractères indiqués.

La recherche expérimentale du second terme de X'_{me}, savoir $\frac{dT_{me}}{dx}$, est plus délicate, vu qu'elle implique la mesure de forces appliquées à un corps en mouvement rapide. Maxwell a construit un gyroscope particulier à cet effet.

Un électro-aimant A peut tourner autour d'un axe horizontal BB' entraîné par un anneau qui lui-même est en mouvement rapide autour d'un axe vertical.

Le courant passe dans la bobine à travers les pivots B et B' qui sont reliés à la pile par des ressorts qui frottent sur des bagues placées sur l'axe vertical.

On compense le champ magnétique le mieux possible.

La position d'équilibre apparent de la bobine giroscopique est la même, que le courant soit coupé ou que la bobine soit parcourue par un courant permanent et, cela, même si l'on met dans la bobine un noyau de fer doux qui la transforme en un puissant électro-aimant. On peut aussi changer le sens du courant; la position d'équilibre ne change pas. Cependant le calcul montre que si le courant était semblable à celui d'une substance douée d'inertie à la façon de l'eau, cette position d'équilibre relatif devrait dépendre de l'intensité et du sens du courant.

Il faut donc admettre qu'on a $T_{me} = 0$.

De l'équation

$$X_e = \frac{dT_e}{dx}$$

et des équations analogues relatives aux autres variables indépendantes, nous déduisons

$$\Sigma X_e \delta x = \delta T_e.$$

Mais nous avions obtenu pour le travail élémentaire des forces élec-

Digitized by Google

trodynamiques

$$\Sigma X_e \delta x = \delta \int \frac{H^2}{8\pi} d\varpi ;$$

d'où

$$T_e = \int \frac{H^2}{8\pi} d\varpi,$$

car, pour $T_e = 0$, on a $H = 0$.

Donc le potentiel électrodynamique représente l'énergie cinétique de l'électricité.

Considérons maintenant les forces agissant sur les courants d'électricité, sur leurs intensités, non sur les circuits, c'est-à-dire les f. e. m.

Soit Y la f. e. m. effective due à l'induction ; la f. e. m. qui doit agir sur le circuit pour l'équilibrer est $Y' = -Y$ et, d'après les équations de Lagrange, on a

$$Y = -Y' = -\frac{d}{dt}\frac{dT}{dy'} + \frac{dT}{dy}.$$

Mais T ne contient pas les y, et Y se réduit au premier terme. Donc, dans un système au repos et avec des courants constants, il n'y a pas de f. e. m. d'induction.

Nous pouvons diviser Y, comme nous avons fait pour X, en trois parties Y_m, Y_e et Y_{me} correspondant aux trois parties de T; mais T_m ne contient pas y', donc $Y_m = 0$. Nous avons ensuite

$$Y_e = -\frac{d}{dt}\frac{dT_e}{dy'}.$$

C'est la f. e. m. d'induction découverte par Faraday. Enfin nous avons

$$Y_{me} = -\frac{d}{dt}\frac{dT_{me}}{dy'}.$$

Mais $\frac{dT_{me}}{dy'}$ est une fonction linéaire des x', des vitesses des conducteurs. Si ce terme existe, on peut produire des f. e. m. indépendamment de tout courant préexistant, simplement en accélérant les vitesses des conducteurs.

Par exemple, dans le cas de la bobine suspendue cité plus haut, si, la bobine étant au repos, nous venons lui imprimer une vitesse instantanée de rotation autour de l'axe vertical, une f. e. m. d'induction devrait être mise en action proportionnellement à l'accélération subie.

Digitized by Google

Elle s'annulerait quand le mouvement serait redevenu uniforme et changerait de sens quand l'accélération changerait de signe. Or, on dispose de moyens de très haute sensibilité pour déceler de très faibles f. e. m. On n'a pu constater de f. e. m. ayant en commun, avec celle-ci, qu'elle ne dépendrait pas des valeurs des intensités, mais du mouvement des circuits et qu'elle serait fonction, non des vitesses de ces circuits, mais des accélérations et changerait de signe avec ces dernières. Donc, ici encore, même conclusion :

$$\frac{d\mathrm{T}_{me}}{dy'} = 0$$

ou, en résumé,

$$\mathrm{T}_{me} = 0.$$

Application. Cas d'un circuit unique. — Soit E la f. e. m. appliquée au circuit A, telle qu'elle provient d'une cause quelconque, comme d'une pile voltaïque ou thermo-électrique, par exemple, laquelle produirait un courant indépendamment de l'induction électromagnétique.

Soit R la résistance du circuit; alors, d'après la loi d'Ohm, une f. e. m. Ry' est requise pour vaincre la résistance, ce qui laisse une f. e. m.

$$\mathrm{E} - Ry'$$

disponible pour faire varier la quantité de mouvement relative au circuit. Appelons cette force Y', nous avons, d'après les équations de la théorie générale,

$$\mathrm{Y}' = \frac{dp}{dt} - \frac{d\mathrm{T}}{dy}.$$

Mais puisque T ne contient pas y', le dernier terme disparaît. Donc l'équation de la f. e. m. est

$$\mathrm{E} - Ry' = \mathrm{Y}' = \frac{dp}{dt}$$

ou

$$\mathrm{E} = Ry' + \frac{dp}{dt}.$$

La f. e. m. provenant de l'induction électromagnétique seule est évidemment $-\frac{dp}{dt}$.

Digitized by Google

Mais on a

$$\delta\mathfrak{T} = \delta T,$$

$\delta\mathfrak{T}$ étant le travail élémentaire à courant constant et δT étant l'accroissement de l'énergie cinétique.

On a

$$T = 4\pi y' Q,$$

$4\pi Q$ étant le flux d'induction embrassé par le circuit et

$$p = \frac{\partial T}{\partial y'} = 4\pi Q.$$

Donc la f. e. m. d'induction a pour valeur

$$-4\pi \frac{dQ}{dt}.$$

Digitized by Google

CHAPITRE VII.

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU CHAMP ÉLECTRODYNAMIQUE.

Équations générales du champ électrodynamique, le milieu étant en repos. — Rappelons que nous avons trouvé l'équation

$$\int_C (\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz) = 4\pi \int_S (lu + mv + nw)\, dS,$$

S étant une surface quelconque s'appuyant sur le contour C, et l, m, n étant les cosinus directeurs de la normale à cette surface menée sur la face positive, la face positive étant celle sur laquelle on doit marcher pour laisser à sa gauche l'aire enveloppée. L'intégrale de ligne peut être transformée en intégrale de surface

$$\int_S \left[l\left(\frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial y}\right) + m\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial z}\right) + n\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}\right)\right] dS,$$

et comme la surface S est arbitraire, on peut appliquer l'équation à un élément de surface quelconque et l'on retombe sur l'équation connue

$$\frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial y} = 4\pi u \qquad \text{(et deux autres équations analogues).}$$

Mais, d'après Maxwell, on doit, pour avoir le courant total, ajouter au courant de conduction qui dépend de la conductivité le courant de déplacement qui dépend de l'élasticité du milieu.

On a

$$u = p + \frac{df}{dt}, \qquad v = q + \frac{dg}{dt}, \qquad w = r + \frac{dh}{dt},$$

D'ailleurs, p, q, r sont les composantes du courant de conduction I_c, de sorte que si E est l'intensité du champ électrique dont les

Digitized by Google

composantes sont (P, Q, R), on a

$$I_c = cE,$$

c étant la conductibilité spécifique.

D'autre part (f, g, h) sont les composantes du déplacement D, et l'on a

$$D = \frac{kE}{4\pi},$$

k étant le pouvoir inducteur spécifique.

On a donc

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\beta}{\partial z} - \dfrac{\partial\gamma}{\partial y} = 4\pi\left(p + \dfrac{df}{dt}\right), \\ \dfrac{\partial\gamma}{\partial x} - \dfrac{\partial\alpha}{\partial z} = 4\pi\left(q + \dfrac{dg}{dt}\right), \\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial y} - \dfrac{\partial\beta}{\partial x} = 4\pi\left(r + \dfrac{dh}{dt}\right), \end{cases} \qquad \text{axes} \begin{cases} Ox, & Oy, & Oz. \\ \text{Est}, & \text{Sud}, & \text{Zénith}. \end{cases}$$

Ces équations constituent le premier groupe des équations fondamentales du champ électrodynamique ; elles montrent que si l'on connaît à un instant t le vecteur intensité du champ électrique et la répartition dans l'espace de l'intensité du champ magnétique, on en déduira immédiatement la valeur du vecteur intensité du champ électrique à l'instant $t + dt$.

D'autre part, nous avons vu que dans un circuit conducteur la force électromotrice d'induction est

$$-4\pi\frac{d}{dt}\int_S \frac{(la + mb + nc)}{4\pi}\,dS.$$

Mais, d'autre part, la force électromotrice totale est aussi égale à

$$RI = \int_C (P\,dx + Q\,dy + R\,dz).$$

On a donc

$$\int_C (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = -4\pi\frac{d}{dt}\int_S \left(\frac{la + mb + nc}{4\pi}\right) dS.$$

Or, cette formule subsiste, quelle que soit la résistance r du circuit, et, de plus, l'intégrale de ligne est une intégrale prise en dehors de la substance même du conducteur. Si les phénomènes électriques

Digitized by Google

ne dépendent que de ce qui se passe au point où l'on fait l'observation et non d'actions à distance, on est amené à supposer que l'équation subsistera, alors même que les valeurs observées de P, Q, R ne l'eussent pas été dans le voisinage d'un conducteur.

Même, dans un milieu diélectrique, nous supposerons que l'équation précédente subsiste, et en transformant l'intégrale de ligne en intégrale de surface et appliquant la formule à un élément de surface parallèle aux faces du trièdre de référence, il vient

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} &= -\frac{\partial a}{\partial t} \\ \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} &= -\frac{\partial b}{\partial t} \\ \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} &= -\frac{\partial c}{\partial t} \end{aligned} \qquad \text{axes} \begin{cases} Ox, & Oy, & Oz. \\ \text{Est}, & \text{Sud}, & \text{Zénith}. \end{cases}$$

Les quantités (a, b, c) sont les composantes du vecteur B, qui est l'induction magnétique.

Si dans le milieu considéré il n'y a pas de magnétisme permanent, on peut écrire

$$B = \mu H$$

ou

$$a = \mu\alpha, \qquad b = \mu\beta, \qquad c = \mu\gamma.$$

S'il y avait du magnétisme permanent I_0, on aurait l'équation vectorielle

$$B = \mu H + 4\pi I_0$$

et, comme le milieu est immobile, les mêmes équations subsisteraient, parce que

$$\frac{\partial I_0}{\partial t} = 0.$$

D'après ce second groupe d'équations, si l'on connaît à l'instant t la répartition dans l'espace du vecteur intensité du champ électrique P, Q, R et le vecteur intensité du champ magnétique α, β, γ, on en déduira la valeur de ce dernier vecteur à l'instant $t + dt$.

Les deux groupes d'équations (I) et (II) sont les équations générales du champ électrodynamique dans le milieu en repos.

Théorème du vecteur radiant de Poynting. — L'énergie électros-

Digitized by Google

tatique est

$$\int \frac{KE^2}{8\pi} d\varpi;$$

sa variation dans l'unité de temps est

$$\frac{dW_e}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int K \left(P \frac{\partial P}{\partial t} + Q \frac{\partial Q}{\partial t} + R \frac{\partial R}{\partial t} \right) d\varpi.$$

L'énergie magnétique a pour expression

$$\int \frac{\mu H^2}{8\pi} d\varpi,$$

H étant le champ magnétique de composantes α, β, γ et sa variation dans l'unité de temps sera

$$\frac{dW_m}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int \mu \left(\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \beta \frac{\partial \beta}{\partial t} + \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) d\varpi;$$

K et μ sont des fonctions de x, y, z, mais des constantes par rapport au temps.

L'énergie qui est dégagée sous forme de chaleur Joule est dans l'unité de temps

$$J = \int (cP^2 + cQ^2 + cR^2)\, d\varpi.$$

L'accroissement total d'énergie à l'intérieur du volume d'intégration pendant l'unité de temps est donc

$$W = J + \frac{dW_e}{dt} + \frac{dW_m}{dt}$$
$$= \int \left[P \left(cP + \frac{K}{4\pi} \frac{\partial P}{\partial t} \right) + \dots \right] d\varpi + \int \left[\alpha \frac{\mu}{4\pi} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \dots \right] d\varpi,$$

ou, en vertu des équations fondamentales du champ électrodynamique,

$$W = \frac{1}{4\pi} \int \left[P \left(\frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial y} \right) + \alpha \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \dots \right] d\varpi,$$

ou

$$W = \frac{1}{4\pi} \int_V \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} d\varpi = \frac{1}{4\pi} \int_S \begin{vmatrix} l & m & n \\ P & Q & R \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} dS,$$

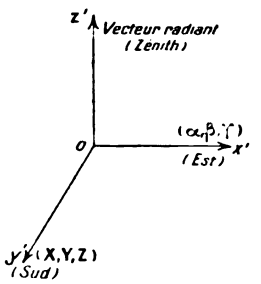
Digitized by Google

l, m, n désignant les cosinus directeurs de la normale à la surface S dirigée vers l'extérieur du volume U. Donc la quantité d'énergie qui entre dans le volume par unité de temps est égal au flux à travers la surface qui limite le volume d'un certain vecteur qui a pour composantes

$$\frac{1}{4\pi}(\beta R - \gamma Q), \qquad \frac{1}{4\pi}(\gamma P - \alpha R), \qquad \frac{1}{4\pi}(\alpha Q - \beta P).$$

Ce vecteur appelé *vecteur radiant de Poynting* n'est autre que le produit vectoriel des intensités du champ magnétique et du champ électrique divisé par 4π. La figure 72 indique le sens.

Fig. 72.



Variation totale d'une intégrale de surface. — Pour pouvoir appliquer dans les milieux en mouvement les équations du champ électrodynamique que nous avons établies dans les milieux en repos, nous aurons besoin de la variation totale d'une intégrale de surface, à la fois quand le temps varie et quand la surface se déforme.

Soit l'intégrale

$$I = \int\int (\alpha\, dy\, dz + \beta\, dz\, dx + \gamma\, dx\, dy).$$

Considérons d'abord l'intégrale

$$A = \int\int \alpha\, dy\, dz,$$

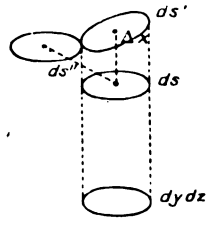
et, en premier lieu, supposons fixe le contour qui limite la surface d'intégration. On aura

$$\delta A = \int\int \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\, dt + \frac{\partial \alpha}{\partial x}\, \Delta x\right) dy\, dz.$$

Digitized by Google

Mais, soient (*fig.* 73) $d\mathrm{S}$ l'élément de surface; δx, δy, δz les variations des coordonnées du centre de gravité de cet élément; l, m, n

Fig. 73.



les cosinus directeurs de la normale à l'élément. L'élément $d\mathrm{S}$ par la translation δx, δy, δz vient en $d\mathrm{S}''$. Soit $d\mathrm{S}'$ l'élément de la surface déformée qui a même projection $dy\,dz$ que $d\mathrm{S}$. Soit dn, la distance au plan de $d\mathrm{S}'$ du centre de gravité de $d\mathrm{S}$. La longueur Δx est celle d'une parallèle à l'axe des x interceptée entre les deux plans des éléments $d\mathrm{S}$ et $d\mathrm{S}''$,

$$l\,\delta x + m\,\delta y + n\,\delta z = dn \qquad \text{et} \qquad l\,\Delta x = dn,$$

d'où

$$\Delta x = \frac{l\,\delta x + m\,\delta y + n\,\delta z}{l}$$

et, par suite,

$$\delta \mathrm{A} = \int\int \left[\frac{\partial \alpha}{\partial t}\,dt + \frac{\partial \alpha}{\partial x}\,\frac{(l\,\delta x + m\,\delta y + n\,\delta z)}{l} \right] dy\,dz.$$

Mais on a

$$l\,d\mathrm{S} = dy\,dz,$$

d'où

$$\delta \mathrm{A} = \int\int \left[l\,\frac{\partial \alpha}{\partial t}\,dt + \frac{\partial \alpha}{\partial x}\,(l\,\delta x + m\,\delta y + n\,\delta z) \right] d\mathrm{S}.$$

Supposons en second lieu que la courbe qui limite le contour d'intégration varie. On aura (*fig.* 74)

$$\Delta \mathrm{A} = \delta \mathrm{A} + \delta_c \mathrm{A},$$

$\delta_c \mathrm{A}$ correspondant à la variation le long du contour. On aura

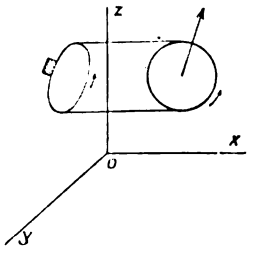
$$\delta_c \mathrm{A} = -\int \alpha(\delta y\,dz - \delta z\,dy)$$

Digitized by Google

et

$$\delta_c \mathrm{I} = -\int \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \delta x & \delta y & \delta z \end{vmatrix} = -\int (\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz);$$

Fig. 74.



X, Y, Z sont données par les formules de définition ci-après :

$$\mathrm{X} = \beta\,\delta z - \gamma\,\delta y,$$
$$\mathrm{Y} = \gamma\,\delta x - \alpha\,\delta z,$$
$$\mathrm{Z} = \alpha\,\delta y - \beta\,\delta x.$$

Donc

$$\delta_c \mathrm{I} = -\int \left[\left(\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial y} \right) l + \dots \right] d\mathrm{S}.$$

En réunissant ces résultats, on a

$$\delta \mathrm{I} = \int\int \left(\left(l \frac{\partial \alpha}{\partial t} + m \frac{\partial \beta}{\partial t} + n \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) dt + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) (l\,\delta x + m\,\delta y + n\,\delta z) \right) - \left(l \left(\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial y} \right) + m \left(\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z} \right) + n \left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x} \right) \right) d\mathrm{S}.$$

Les axes sont conformes au schéma : orientation des axes

Ox,	Oy,	Oz.
Est,	Sud,	Zénith.

Prenons maintenant des axes ayant l'orientation contraire et employons les notations vectorielles ; le vecteur qui avait pour composantes (X, Y, Z) devient $-[\mathrm{H}\,\delta s]$, δs étant le vecteur qui a pour projections sur les axes $(\delta x, \delta y, \delta z)$. D'autre part, dans la transformation d'une intégrale de ligne en une intégrale de surface, nous

Digitized by Google

avons un changement de signe. Soit maintenant $\delta s = \omega\, dt$), et soit ν le vecteur qui a pour composantes (l, m, n).

Il viendra

$$\delta \mathrm{I} = \int\int \left(\nu, \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t} + \omega \operatorname{div}. \mathrm{H} + \operatorname{rot}.[\mathrm{H}\omega]\right) dt\, d\mathrm{S};$$

mais rappelons-nous qu'on a

$$\operatorname{rot}_x \mathrm{A} = \frac{\partial \mathrm{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{A}_y}{\partial z}, \qquad \ldots$$

et l'orientation des axes :

$\mathrm{O}x$,	$\mathrm{O}y$,	$\mathrm{O}z$.
Est,	Nord,	Zénith.

Électrodynamique des milieux en mouvement. — Considérons l'intégrale double

$$\int_{\mathrm{S}} (l\alpha + m\beta + n\gamma)\, d\mathrm{S}.$$

Supposons que x, y, z soient les coordonnées d'un point M de la surface S; soient ξ, η, ζ les composantes de la vitesse du point M; admettons que α, β, γ soient fonctions des coordonnées x, y, z du point M et du temps t. Le contour qui borde la surface S se déplace également avec le temps. Posons, en outre,

$$\begin{aligned} \mathrm{X} &= \eta\gamma - \beta\zeta, \\ \mathrm{Y} &= \zeta\alpha - \gamma\xi, \\ \mathrm{Z} &= \xi\beta - \alpha\eta. \end{aligned}$$

Dans ces conditions, la variation totale, par unité de temps, de l'intégrale double considérée sera

$$\int \Sigma l \frac{\partial \alpha}{\partial t}\, d\mathrm{S} + \int \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) \Sigma l\xi\, d\mathrm{S} - \int \Sigma \left(\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial y}\right) l\, d\mathrm{S}.$$

Nous allons nous servir de cette formule pour voir ce que deviennent les équations du champ électrodynamique dans les milieux en mouvement.

Dans les milieux en repos, les deux lois ont pour expressions les équations suivantes :

1° *Loi du courant total ou de Maxwell.* — Soient α, β, γ les

Digitized by Google

composantes de l'intensité du champ magnétique; p, q, r les composantes du courant de conduction; P, Q, R les composantes de l'intensité du champ électrique; $\frac{KP}{4\pi}$, $\frac{KQ}{4\pi}$, $\frac{KR}{4\pi}$ les composantes du déplacement introduit par Maxwell; on aura

$$\int_C (\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz) = 4\pi \int (lp + mq + nr)\,dS + 4\pi \frac{d}{dt} \int \left(l\frac{KP}{4\pi} + m\frac{KQ}{4\pi} + n\frac{KR}{4\pi} \right) dS.$$

2° *Loi de l'induction ou de Faraday.* — Soient a, b, c les composantes de l'induction magnétique; on a

$$\int_C (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = -\frac{d}{dt} \int_S (la + mb + nc)\,dS.$$

Passons maintenant au cas des milieux en mouvement. Occupons-nous d'abord de la seconde loi. Soient

$$X = \gamma_1 c - \zeta b,$$
$$Y = \zeta a - \xi c,$$
$$Z = \xi b - \gamma_1 a.$$

Remarquons, d'autre part, que l'on a

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0,$$

parce que le magnétisme total contenu à l'intérieur d'une surface fermée est toujours nul.

Appliquons la formule de variation d'une intégrale double, en supposant que, dans l'intégrale de surface de la loi de Faraday, la surface d'intégration soit entraînée avec la matière; il viendra

$$\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}.$$

Or, on peut exprimer a, b, c en fonction du potentiel vecteur et l'on a

$$a = \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}.$$

En remontant des rotations aux vecteurs eux-mêmes, on aura

Digitized by Google

donc

$$P = -\frac{\partial F}{\partial t} + \eta c - \zeta b - \frac{\partial V}{\partial x}$$

et deux autres équations analogues, en remarquant que, s'il n'y a pas de champ magnétique, P se réduit à la composante $-\frac{\partial V}{\partial x}$ de l'intensité du champ électrostatique.

Ainsi donc, pour obtenir la force électromotrice (X, Y, Z) engendrée par le déplacement du courant, il faut bien supposer que la surface d'intégration est entraînée dans le mouvement de la matière.

Passons à la loi de Maxwell. Appliquons de même la formule de variation d'une intégrale de surface, en supposant ladite surface entraînée dans le mouvement de la matière. On aura

$$\frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial y} = 4\pi\left[p + \frac{\partial}{\partial t}\frac{KP}{4\pi} + \rho\xi - \left(\frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y}\right)\right];$$

en appelant ρ la densité de la quantité d'électricité, soit

$$\rho = \frac{\partial}{\partial x}\frac{KP}{4\pi} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{KQ}{4\pi} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{KR}{4\pi},$$

et en posant

$$X' = \eta\frac{KR}{4\pi} - \zeta\frac{KQ}{4\pi},$$

$$Y' = \zeta\frac{KP}{4\pi} - \xi\frac{KR}{4\pi},$$

$$Z' = \xi\frac{KQ}{4\pi} - \eta\frac{KP}{4\pi},$$

on voit que le courant total se compose de quatre termes, savoir :

1° Le courant de conduction;

2° Le courant de déplacement (introduit par Maxwell);

3° Le courant de convection, mis hors de doute par les expériences de Rowland et celles de Pender et Crémieu;

4° Un courant complémentaire que l'expérience n'a pas encore mis nettement en évidence et qui serait égal au produit vectoriel du déplacement par la vitesse du milieu.

Le courant de convection a été mis en évidence par Rowland, puis par Pender en Amérique. Crémieu fit en France des expériences analogues et obtint un résultat négatif.

Digitized by Google

Les expériences de Pender et de Crémieu furent reprises en commun à Paris; on vit qu'il suffisait de dévernir le disque employé par Crémieu pour obtenir un résultat positif. Les premiers résultats négatifs paraissent dus à l'ionisation et aux charges résiduelles.

Dans une lettre à M. Potier, M. Poincaré s'exprime comme suit :

« ... Supposons qu'on ait une translation, chaque petit cylindre parallèle à l'axe des x subit une translation dans le sens de ses génératrices. Seulement, la vitesse de translation n'est pas la même pour tous les cylindres. En d'autres termes, on a

$$\eta = \zeta = 0, \qquad \xi = f(y, z),$$

la fonction f étant indépendante de x et de t. — Nous supposons que tout est permanent dans le temps et par rapport à x. — Toutes les dérivées $\frac{\partial}{\partial t}$ et $\frac{\partial}{\partial x}$ sont nulles. Le champ doit être alors perpendiculaire à Ox, c'est-à-dire que

$$f = 0, \qquad \rho = \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z},$$

f, g, h étant les composantes du déplacement

$$\left(f = \frac{KP}{4\pi}, \dots\right).$$

Les courants se réduisent à $[f]$, $[g]$, $[h]$ (¹).

» Dans le cas actuel, on trouve

$$[g] = 0, \quad [h] = 0 \quad \text{et} \quad [f] = \frac{\partial}{\partial y} g\xi + \frac{\partial}{\partial z} h\xi - \xi\left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) = g\frac{\partial \xi}{\partial y} + h\frac{\partial \xi}{\partial z}.$$

Supposons maintenant que tout soit de révolution autour de l'axe des x; on a

$$y = r\cos\varphi, \qquad z = r\sin\varphi,$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial r}\cos\varphi, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial r}\sin\varphi.$$

(¹) On désigne ainsi les quantités suivantes :

$$[f] = \frac{\partial}{\partial y}(g\xi - f\eta) - \frac{\partial}{\partial z}(f\zeta - h\xi) - \Sigma\xi\frac{\partial f}{\partial x}$$

$[g]$ et $[h]$ s'en déduisant par permutation. Elles ont été introduites dans la théorie de l'électrodynamique des corps en mouvement.

Digitized by Google

On a

$$\alpha = 0, \qquad \beta = -M\sin\varphi, \qquad \gamma = M\cos\varphi,$$

M étant le champ magnétique;

$$f = 0, \qquad g = E\cos\varphi, \qquad h = E\sin\varphi,$$

et le déplacement électrique devient

$$[f] = \frac{\partial\xi}{\partial r}[g\cos\varphi + h\sin\varphi] = E\frac{\partial\xi}{\partial r}.$$

Or, d'après les lois du champ électrodynamique, on a

$$2\pi M r = 4\pi\int 2\pi r\,dr\,[f]$$

ou

$$Mr = 4\pi\int r[f]\,dr = 4\pi\int rE\,d\xi,$$

d'où

$$\frac{d(Mr)}{dr} = 4\pi rE\frac{d\xi}{dr};$$

d'autre part,

$$\frac{d(Er)}{dr} = r\rho.$$

» Telles sont les équations qui définissent les deux champs électrique et magnétique. En intégrant par parties, on trouve

$$\int_0^r Er\,d\xi = [Er\xi]_0^r - \int_0^r \xi\frac{d(Er)}{dr}\,dr.$$

Si r est assez grand pour qu'on se trouve dans l'espace qui est en repos, l'expression $Er\xi$ s'annule aux deux limites, de sorte qu'il reste

$$Mr = -4\pi\int \xi\frac{d(Er)}{dr}\,dr = -4\pi\int r\rho\xi\,dr,$$

et nous retombons sur le courant de convection pur. »

Action électromagnétique d'une quantité d'électricité en mouvement. — Le raisonnement qui précède est absolument rigoureux ; mais on fait quelquefois le raisonnement suivant qui n'est pas à l'abri de tout reproche.

Soient q une masse électrique qui se déplace avec une vitesse v

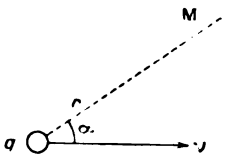
Digitized by Google

(*fig.* 75) et M le point où l'on veut évaluer l'intensité H du champ électromagnétique.

Nous avons vu que l'on avait

$$\int_C (\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz) = 4\pi \int_S (lu + mv + nw)\, dS.$$

Fig. 75.



Si le courant de conduction est nul, u se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{KP'}{4\pi}\right), \quad \ldots,$$

et l'on aura

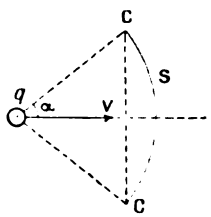
$$\int_C (\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz) = 4\pi \frac{d\varepsilon}{dt},$$

où ε est le flux d'induction électrostatique,

$$\varepsilon = \int_S \frac{KE_n}{4\pi}\, dS.$$

Appliquons ici cette formule en prenant pour contour C le cercle ayant pour axe v et passant par M, et pour surface S la calotte sphé-

Fig. 76.



rique de centre q s'appuyant sur le cercle C (*fig.* 76); il vient

$$H' 2\pi r \sin\alpha = 4\pi \frac{d}{dt}\left[\frac{q}{4\pi r^2} 2\pi r^2 (1 - \cos\alpha)\right],$$

Digitized by Google

ou

$$H' 2\pi r \sin\alpha = 4\pi \frac{q}{2} \sin\alpha \frac{d\alpha}{dt} \qquad \text{ou} \qquad H' = \frac{q}{r} \frac{d\alpha}{dt}.$$

Mais on a

$$-v = \frac{d}{dt}(r\cos\alpha), \qquad 0 = \frac{d}{dt}(r\sin\alpha).$$

Donc

$$-v = \frac{d}{dt} re^{i\alpha} = \frac{dr}{dt} e^{i\alpha} + rie^{i\alpha} \frac{d\alpha}{dt} \qquad \text{ou} \qquad -ve^{-i\alpha} = \frac{dr}{dt} + ir \frac{d\alpha}{dt};$$

d'où, en égalant les parties imaginaires,

$$v \sin\alpha = r \frac{d\alpha}{dt};$$

donc

$$H' = \frac{qv \sin\alpha}{r^2}.$$

Or, un élément de courant $i\,ds$ de direction v placé au point q produirait au point M le champ magnétique $\frac{i\,ds\sin\alpha}{r^2}$.

Une quantité d'électricité qui se déplace produit donc la même action électromagnétique qu'un courant qui transporterait la même quantité, car

$$q = i\,dt \qquad \text{et} \qquad qv = q\frac{ds}{dt} = i\,ds.$$

Dans cette démonstration, on suppose que la surface d'intégration se déforme d'une façon particulière ; on a ainsi un certain mouvement du milieu compatible d'ailleurs avec le déplacement de la quantité q. Pour être rigoureux, il faut supposer que le contour C est infiniment voisin de la masse q, de sorte que la force électrique soit $\frac{q}{4\pi r^2}$, comme si elle se propageait instantanément.

On peut dire encore pour montrer l'insuffisance du raisonnement qui précède qu'on a calculé le flux d'induction électrique comme en électrostatique; or c'est une hypothèse inexacte, parce que la création du champ magnétique fait varier le champ électrique. Il en résulte une modification de la répartition des lignes de force électriques ; leur densité tend à être plus grande dans le plan diamétral de l'électron perpendiculaire à la direction de sa vitesse.

Digitized by Google

CHAPITRE VIII.

PASSAGE DE LA THÉORIE DE MAXWELL A LA THÉORIE DE LORENTZ.

Passage de la théorie de Maxwell à la théorie de Lorentz. — Avant d'exposer la théorie de Lorentz, il convient de résumer les principaux résultats de la théorie de Maxwell.

Dans la théorie de Maxwell, le courant total se compose du courant de conduction K et du courant de déplacement $\frac{d\mathrm{D}}{dt}$; nous avons vu d'ailleurs qu'il convenait d'ajouter dans les milieux en mouvement : 1° le courant de convection $e\mathrm{U}$, e étant la densité de la quantité d'électricité et U la vitesse de la matière qui porte e; 2° le courant complémentaire égal au produit vectoriel de la vitesse par le déplacement; mais ces deux derniers termes ont été introduits par Hertz.

Du courant supposé connu, on tire le potentiel vecteur A; et de là l'induction magnétique.

$$\mathrm{B} = \mathrm{rot.A}.$$

Dès lors, on a l'intensité du champ électrique, en fonction du potentiel électrostatique ψ et des autres grandeurs déjà notées, par la formule

$$\mathrm{E} = [\mathrm{UB}] - \frac{d\mathrm{A}}{dt} + \mathrm{grad}.\psi.$$

Le courant de conduction K est lié à E par la loi d'Ohm

$$\mathrm{K} = c\mathrm{E},$$

c étant la conductibilité spécifique.

Le déplacement électrique est de même lié à E par l'hypothèse de Maxwell

$$\mathrm{D} = \frac{k\mathrm{E}}{4\pi},$$

où k désigne la capacité inductive spécifique.

Digitized by Google

De cette manière, le courant total S est donné par

$$S = K + \frac{dD}{dt}.$$

Le déplacement D est aussi lié à la densité électrique e par l'équation de liaison

$$e = \text{div. D.}$$

Soit de même H l'intensité du champ magnétique, quand cette intensité dérive d'un potentiel Ω; on a

$$H = \text{grad.}\Omega.$$

Si l'on appelle μ la perméabilité magnétique d'un milieu polarisable, on a

$$B = \mu H.$$

Dans les idées de Maxwell, le vide était aussi polarisable ; pour le vide, on avait $\mu = 1$; si un milieu est moins polarisable que le vide, on a $\mu < 1$; alors, les corps diamagnétiques sont simplement des corps moins magnétiques que le vide et le sens de l'action subie par eux dans un champ magnétique s'explique de la même façon que la poussée, subie de bas en haut par un corps plongé dans un liquide pesant, s'explique elle-même par le principe d'Archimède.

La densité magnétique ou apparente de fluide inducteur magnétique (magnétisme « libre » opposé au magnétisme « vrai ») est donnée par la combinaison des deux équations

$$\overline{B} = \overline{H} + 4\pi\overline{I},$$
$$m = \text{div. I},$$

qui définissent l'intensité d'aimantation I et la densité du magnétisme libre m.

Enfin, comme le courant total est soumis à l'action du champ magnétique, on a pour la force mécanique agissant sur la matière qui porte le courant, le magnétisme et l'électricité

$$F = [SH] + e\,\text{grad.}\psi + m\,\text{grad.}\Omega.$$

Au lieu de H, Maxwell met B, mais M. Poincaré a montré qu'il fallait mettre H si l'on veut la compatibilité de l'expression de la force mécanique avec l'expression correcte de l'énergie magnétique,

Digitized by Google

savoir

$$T = \int \frac{\mu H^2}{8\pi} d\varpi.$$

Pour Maxwell, cette énergie, tout au moins pour le cas de $\mu = 1$, représente l'énergie cinétique des courants; dans un autre langage, on peut dire que T représente la force vive de l'éther.

Enfin, l'énergie électrique est potentielle et a pour expression

$$W = \frac{1}{2} \int (ED)\, d\varpi \qquad \text{ou} \qquad \int k \frac{E^2}{8\pi} d\varpi.$$

Ajoutons que l'énergie est, par suite, considérée comme localisée dans chaque élément de volume du milieu électrique ou magnétique.

Maxwell s'est alors posé la question : « Étant donné que l'énergie électrique est l'énergie potentielle du mécanisme caché qui régit les phénomènes électromagnétiques et que l'énergie des courants doit être l'énergie cinétique de ce même mécanisme, est-il possible, par l'application des lois ordinaires de la Mécanique rationnelle, de retrouver les expressions : 1° de la force qui agit sur la matière; 2° de la force E qui produit le déplacement D? » Le succès a couronné cette tentative de Maxwell.

Depuis lors, on retrouve, dans toutes les théories, l'application des équations de Lagrange, sous des formes variées.

Théories moléculaires. — Pour expliquer l'existence du coefficient k, relatif à la capacité inductive spécifique du milieu, Maxwell a imaginé la théorie du déplacement électrique, mais on peut y voir plutôt une image commode qu'une réalité objective. Antérieurement, Mossotti avait imaginé qu'un diélectrique est un corps parsemé de petites sphères conductrices naturellement à l'état neutre; sous l'action d'un champ extérieur et de leurs réactions mutuelles, elles se polarisent et si l'on suppose qu'elles sont réparties avec une certaine symétrie, on trouve ainsi une explication du coefficient k, mais le courant de déplacement qui résulte de cette théorie diffère du courant de déplacement de Maxwell. Poincaré a montré qu'il suffit, pour obtenir, la concordance désirée, de modifier la théorie que Poisson a basée sur l'hypothèse de Mossotti, en remplaçant les petites sphères conductrices par des cellules polyédriques conduc-

Digitized by Google

trices séparées les unes des autres par des lames à faces parallèles isolantes, d'une épaisseur infiniment petite par rapport à leur surface.

Dans la théorie de Lorentz, on sépare nettement les phénomènes qui ont lieu dans le vide ou pour mieux dire dans l'éther de ceux qui sont dus à la matière. Le courant de déplacement de Maxwell est alors dédoublé en deux courants bien distincts : le premier auquel on conservera le nom de *courant de déplacement*, est identique à celui que Maxwell considère dans le vide ; le second est dû au mouvement des ions, que le champ électrique a déplacés de leurs positions d'équilibre et devrait être considéré comme le vrai courant de polarisation diélectrique.

L'explication de la polarisation magnétique et du coefficient μ de perméabilité magnétique a donné lieu à des théories analogues : la théorie de Poisson du magnétisme induit a les plus grandes analogies avec celle qui résulte pour les diélectriques de l'hypothèse de Mossotti ; mais Ampère attribue le magnétisme à des courants particulaires. Ces courants existent-ils dans tous les milieux, et en particulier dans le vide, ou bien n'a-t-on à les envisager que dans les corps matériels ? C'est cette dernière hypothèse qui paraît correspondre à la réalité, si le diamagnétisme est autre chose qu'une apparence. Dans la théorie des ions, on se base sur l'expérience de Rowland, qui devient fondamentale et d'après laquelle le courant de convection agit sur l'aiguille aimantée et par suite crée un champ magnétique ; les courants particulaires d'Ampère sont alors remplacés par le mouvement circulaire des ions ; mais ces ions n'existent que dans les molécules matérielles.

La conductibilité électrique peut aussi s'expliquer par des hypothèses moléculaires ou corpusculaires. Mais il y avait un abîme entre la conductibilité électrolytique et la conductibilité métallique. Les phénomènes de décomposition chimique mettaient en évidence, d'une façon très nette, une convection de l'électricité ; tandis que les métaux se refusaient à une pareille explication, le courant les traversant sans qu'ils subissent d'altération. Les phénomènes de la conductibilité gazeuse et les études relatives aux rayons cathodiques ont amené à concevoir les électrons comme des grains électrisés dont la masse n'est pas matérielle et, dès lors, les métaux ont pu rentrer dans la loi commune ; ce sont les électrons qui circuleraient entre les mailles des molécules matérielles inaltérées.

Digitized by Google

Le dédoublement du courant de déplacement de Maxwell entraîne une singulière conséquence; le courant de déplacement qui a son siège dans l'éther engendre un champ magnétique; il doit donc subir réciproquement la réaction de ce champ, mais une pareille réaction ne signifie rien, puisque l'éther est immobile. Le principe de l'action et de la réaction ne subsiste plus pour la matière seule et il ne signifie rien de réel, si on l'applique à l'ensemble de la matière et de l'éther.

Théorie de Lorentz. — 1° L'espace est rempli par l'éther; l'éther, siège des phénomènes électromagnétiques et par conséquent de la lumière et de la chaleur rayonnante, pénètre la matière; on peut aussi imaginer qu'il pénètre les atomes constitutifs de la matière eux-mêmes, ce qui ne souffre aucune difficulté si l'on envisage lesdits atomes comme des singularités ou des modifications locales de l'éther.

2° L'éther est en repos, une portion de l'éther n'a pas de mouvement relatif par rapport à une autre portion. La théorie électromagnétique rend compte de l'entraînement partiel apparent imaginé par Fresnel et mis en évidence par Fizeau. Ajoutons que les théories relatives au principe de relativité semblent rendre plus ou moins inutile cette conception auxiliaire d'un éther, par rapport auquel il ne serait possible de déceler aucun mouvement relatif de la matière pondérable, mais elles ne la contredisent pas.

3° La théorie de la dispersion des couleurs du spectre résulte de la considération de particules électriques chargées ou ions et de l'action réciproque de ces ions et de la matière; les actions qui s'exercent sur les ions sont celles du champ électromagnétique. Les corps parcourus par un courant de conduction sont en réalité traversés par des électrons. La nature de ces électrons a été précisée par les travaux de Giese et de Drude. Déjà les ions avaient été introduits par Faraday dans l'étude des électrolytes et ce sont eux aussi qui avaient fourni l'explication de la conductibilité gazeuse. L'électrolyse, la théorie électronique des métaux, les théories relatives à l'ionisation sont traitées sommairement dans d'autres parties de ce cours.

4° Les équations de Maxwell subsistent en tant qu'elles définissent le mouvement de l'éther en chaque point. On peut les considérer comme un postulat. On peut aussi se donner le courant total, constitué

Digitized by Google

par le courant de déplacement et le courant de convection, comme la rotation de l'intensité du champ magnétique et, suivant l'exemple de Maxwell, en déduire les expressions de l'intensité du champ électrique et de la force mécanique, en appliquant les principes les plus généraux de la Mécanique rationnelle.

Équations fondamentales relatives à un système d'ions répartis dans l'éther. — 1° Quand l'éther n'est pas dans sa position d'équilibre naturel, il subit un déplacement D et l'on a

$$\operatorname{div}.\mathrm{D} = 0$$

ou

$$\operatorname{div}.\mathrm{D} = e,$$

suivant qu'au point considéré la densité électrique est égale à zéro ou à e. Peu importe que ce point soit ou non appartenant à de la matière pondérable.

On a, d'ailleurs,

$$\int \mathrm{D}_\nu \, d\varpi = \int e \, d\varpi.$$

2° Le courant de déplacement $\frac{d\mathrm{D}}{dt}$ est supposé existant même à l'intérieur des corps pondérables; le courant de convection C est donné en sens, grandeur et direction par

$$\mathrm{C} = e\mathrm{U},$$

U désignant la vitesse de la matière.

Le courant total S est donné par l'équation géométrique

$$\mathrm{S} = \mathrm{C} + \frac{d\mathrm{D}}{dt} = e\mathrm{U} + \frac{d\mathrm{D}}{dt}.$$

Si $d\varpi$ est l'élément de volume d'un corps matériel qui emporte sa charge avec lui, $ed\varpi$ demeure constant pendant la déformation.

Donc, δ signifiant le signe de variation, on a

$$\delta \int e \, d\varpi = 0,$$

quand la surface σ qui entoure le champ d'intégration se déplace

Digitized by Google

avec la matière, d'où

$$\delta\int \operatorname{div}.\,\mathrm{D}\,d\varpi = 0 \qquad \text{ou} \qquad \delta\int \mathrm{D}_\nu\,d\sigma = 0.$$

Or on a, d'après le théorème général relatif à la variation d'une intégrale de surface,

$$\delta\int \mathrm{D}_\nu\,d\sigma = \int\left(\frac{d\mathrm{D}}{dt} + \mathrm{U}\operatorname{div}.\,\mathrm{D} + \operatorname{rot}.[\mathrm{DU}]\right)_\nu d\sigma.$$

Mais comme la surface est une surface fermée, c'est-à-dire une surface ouverte qui s'appuie sur un contour infiniment petit, le terme $\int \operatorname{rot}[\mathrm{DU}]_\nu\,d\sigma$ est égal à zéro, parce que le flux coupé est nul, il reste donc

$$\int\left(\frac{d\mathrm{D}}{dt} + \mathrm{U}e\right)_\nu d\sigma = 0 \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{div}.\left(\frac{d\mathrm{D}}{dt} + e\mathrm{U}\right) = 0$$

ou

$$\operatorname{div}.\,\mathrm{S} = 0.$$

3° Quand l'éther est écarté de sa position d'équilibre normal, son état se trouve caractérisé, non seulement par le déplacement D, mais encore par l'intensité du champ magnétique H. Les lois qui régissent le champ magnétique s'expriment par les équations

$$\operatorname{div}.\,\mathrm{H} = 0,$$
$$\operatorname{rot}.\,\mathrm{H} = 4\pi\mathrm{S}.$$

Ces équations sont valables, même à l'intérieur des corps pondérables.

4° L'énergie potentielle de l'éther est son énergie électrique

$$\mathrm{W}_e = \int \frac{k\mathrm{E}^2}{8\pi}\,d\varpi.$$

Or, on a

$$\mathrm{D} = \frac{k\mathrm{E}}{4\pi};$$

mais, dans le système électromagnétique, on a $\mu = 1$ et $k = 1 : \mathrm{V}^2$, en appelant V la vitesse de la lumière, puisque la lumière n'est qu'une émission d'ondulations électromagnétiques; d'où

$$\mathrm{W}_e = 2\pi\mathrm{V}^2\int \mathrm{D}^2\,d\varpi.$$

Digitized by Google

5° L'énergie cinétique de l'éther est son énergie magnétique

$$W_m = \int \frac{\mu H^2}{8\pi} d\varpi.$$

Dans le système électromagnétique, on a $\mu = 1$; d'où

$$W_m = \int \frac{H^2 d\varpi}{8\pi}.$$

6° Cela posé, appliquons les principes généraux de la Mécanique. Nous avons un système à liaisons : la liaison s'exprime par

$$\text{div. } D = e.$$

Faisons porter le signe de variation sur les variables qui définissent l'état de l'éther, nous aurons

$$\text{div. } \delta D = \delta e = 0,$$

parce que la densité électrique en un point dépend du mouvement de la matière et non des positions ou des vitesses qui définissent l'éther. On devra avoir de plus

$$\delta \int_0^t (W_m - W_e)\, dt = 0$$

et, par conséquent,

$$\int_0^t (\delta W_m - \delta W_e - \psi \text{ div. } \delta D)\, dt = 0,$$

la quantité ψ étant une fonction arbitraire des coordonnées, indépendante du temps.

Introduisous le potentiel vecteur A défini par

$$\text{rot. } A = H,$$

il vient

$$\delta W_m = \int H \frac{\delta H}{4\pi} d\varpi = \int \text{rot. } A \left(\frac{\delta H}{4\pi}\right) d\varpi$$

ou, par l'intégration par parties, l'intégrale de surface s'annulant à l'infini

$$\delta W_m = \int \left(A \frac{\delta \text{ rot. } H}{4\pi}\right) d\varpi = \int (A\, \delta S)\, d\varpi.$$

Or, on a

$$\delta S = \delta \frac{dD}{dt} + \delta(eU).$$

Digitized by Google

Mais $\delta(eU) = \delta e.U = 0$ puisque $\delta e = 0$, comme on l'a rappelé. D'où

$$\delta W_m = \int \left(A\,\delta \frac{dD}{dt} \right) d\varpi$$

et

$$\int_0^t \delta W_m\, dt = \int_0^t \int - \frac{dA}{dt}\, \delta D\, d\varpi\, dt,$$

les variations δ s'annulant aux époques 0 et t.

On a aussi

$$\delta W_e = 4\pi V^2 \int D\, \delta D\, d\varpi.$$

Enfin, appliquons à la dernière variation la règle de calcul

$$\psi \operatorname{div}. \delta D = \operatorname{div}.(\psi\, \delta D) + (\delta D \operatorname{grad}. \psi),$$

et remarquons que l'on a

$$\int \operatorname{div}.(\psi\, \delta D)\, d\varpi = \int (\psi\, \delta D)_\nu\, d\sigma = 0,$$

parce que $\delta D = 0$ sur la surface d'intégration à l'infini; il vient

$$\int \psi \operatorname{div}. \delta D\, d\varpi = \int (\delta D \operatorname{grad}. \psi)\, d\varpi.$$

Par conséquent, en ajoutant, il vient

$$\int_0^t \int \left(\delta D \left(- \frac{dA}{dt} - 4\pi V^2 D - \operatorname{grad}. \psi \right) \right) d\varpi\, dt = 0,$$

d'où

$$- \frac{dA}{dt} - 4\pi V^2 D - \operatorname{grad}. \psi = 0$$

et, en prenant la rotation et tenant compte de

$$\operatorname{rot}. \frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} \operatorname{rot}. A = \frac{d}{dt} H,$$

$$\frac{dH}{dt} = - 4\pi V^2 \operatorname{rot}. D.$$

7° Nous avons ainsi toutes les équations qui définissent l'état de

Digitized by Google

l'éther, savoir

$$\begin{aligned} \text{div. D} &= e, \\ \text{div. H} &= 0, \\ \text{rot. H} &= 4\pi \text{S}, \\ -4\pi \text{V}^2 \text{ rot. D} &= \frac{d\text{H}}{dt}. \end{aligned}$$

8° En dérivant par rapport au temps l'équation

$$\frac{d\text{A}}{dt} + 4\pi \text{V}^2 \text{D} + \text{grad.}\,\psi = 0,$$

il vient

$$\frac{d^2\text{A}}{dt^2} + 4\pi \text{V}^2 \frac{d\text{D}}{dt} = 0.$$

Or, on a

$$\frac{d\text{D}}{dt} = \frac{\text{rot. H}}{4\pi} - e\text{U}$$

ou

$$\frac{d\text{D}}{dt} = \frac{\text{rot. rot. A}}{4\pi} - e\text{U},$$

mais

$$\text{rot. rot. A} = -\text{ grad. div. A} - \Delta\text{A}.$$

D'où

$$\frac{d^2\text{A}}{dt^2} + 4\pi \text{V}^2 \left[-\frac{1}{4\pi} \text{grad. div. A} - \frac{\Delta\text{A}}{4\pi} - e\text{U} \right] = 0.$$

Si l'on pose div. A = 0, il reste

$$\frac{1}{\text{V}^2} \frac{d^2\text{A}}{dt^2} - \Delta\text{A} - 4\pi e\text{U} = 0.$$

9° Or, jusqu'à présent, le vecteur A n'est pas complètement déterminé; nous avons seulement posé

$$\text{H} = \text{rot. A}.$$

Si, comme nous venons de le faire, pour établir notre dernière équation, nous posons en outre

$$0 = \text{div. A},$$

le vecteur A sera alors déterminé d'après le théorème de Vaschy, à condition de supposer en outre qu'il s'annule à l'infini, de façon que les intégrales de surface disparaissent.

On a alors

$$\text{A} = \text{rot.} \int \frac{\text{H}'}{4\pi r'} d\varpi',$$

Digitized by Google

$d\varpi'$ coordonnées (x', y', z'); (x, y, z) coordonnées du point où l'on envisage A; ou

$$A_x = \frac{\partial}{\partial y}\int \frac{H'_z}{4\pi r'} d\varpi' - \frac{\partial}{\partial z}\int \frac{H'_y}{4\pi r'} d\varpi'$$

ou

$$A_x = \int \left(\frac{H'_z}{4\pi} d\varpi' \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial y} - \frac{H'_y}{4\pi} d\varpi' \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial z} \right)$$

ou

$$A_x = + \int \left(- \frac{H'_z}{4\pi} d\varpi' \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial y'} + \frac{H'_y}{4\pi} d\varpi' \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial z'} \right)$$

et, en intégrant par parties,

$$A_x = \int \left(\frac{\partial H'_z}{\partial y'} - \frac{\partial H'_y}{\partial z'} \right) \frac{1}{r'} \frac{d\varpi'}{4\pi}$$

ou

$$A = \int \frac{\text{rot.}H'}{r'} \frac{d\varpi'}{4\pi} = \int \frac{4\pi S'}{r'} \frac{d\varpi'}{4\pi} = \int \frac{S'}{r'} d\varpi',$$

d'où

$$\Delta A = - 4\pi S.$$

Les formules $A = \int \frac{S}{r} d\varpi$ et $\Delta A = - 4\pi S$ (on peut maintenant laisser les accents de côté, car il n'y a plus de confusion à craindre), déterminent complètement le potentiel vecteur d'une façon explicite.

10° De l'équation

$$- \frac{dA}{dt} - 4\pi V^2 D = \text{grad.}\psi$$

on tire

$$- \frac{d}{dt} \text{div.}A - 4\pi V^2 \text{div.}D = \text{div. grad.}\psi = - \Delta\psi;$$

or

$$\text{div.}A = 0,$$

$$\text{div.}D = e.$$

D'où

$$\Delta\psi = + 4\pi V^2 e.$$

Ceci montre que $-\psi$ est le potentiel électrostatique d'une matière attirante de densité $V^2 e$.

Calcul de la force mécanique qui agit sur la matière pondérable. — La force mécanique qui agit sur la matière peut également se déduire du principe de la moindre action. La densité électrique e est

Digitized by Google

portée par la matière et l'on a l'équation de liaison

$$\operatorname{div} D - e = 0.$$

Si T est l'énergie cinétique, Π l'énergie potentielle, ψ une fonction quelconque des coordonnées de l'espace, le principe de la moindre action s'exprimera par l'équation suivante, où δ signifie un signe de variation qui s'applique aux coordonnées de la matière et aux vitesses de ces coordonnées

$$\int_0^t (\delta T - \delta \Pi - \psi \delta(\operatorname{div} D - e))\, d\varpi = 0.$$

Soient $m\,d\varpi$ la masse de l'élément matériel, $e\,d\varpi$ sa charge, U la vitesse de translation de la matière, vitesse indépendante de x, y, z à l'intérieur d'un électron, si l'on suppose qu'il n'est pas en rotation; soient aussi δs un déplacement virtuel de la matière, δU la vitesse virtuelle.

L'énergie cinétique T se compose de deux parties : la force vive de la matière $\int \frac{1}{2} m U^2 d\varpi$ et l'énergie cinétique de l'éther $\frac{1}{2}\int (AS)\, d\varpi$, où A représente le potentiel vecteur, S le courant composé du courant de déplacement $\frac{dD}{dt}$ et du courant de convection eU. On a donc

$$T = \int \frac{1}{2} m U^2 d\varpi + \frac{1}{2}\int (AS)\, d\varpi.$$

Dans cette dernière intégrale, les parenthèses indiquent un produit intérieur, conformément aux notations ordinaires du calcul vectoriel.

L'énergie potentielle Π se compose de deux parties : l'énergie potentielle des forces non électriques, telles que la pesanteur, par exemple $\int \chi\, d\varpi$ et l'énergie potentielle électrique, ou électrostatique, $2\pi V^2 \int D^2 d\varpi$, dans laquelle V est la vitesse de la lumière et D le déplacement électrique de Maxwell. On a

$$\Pi = \int \chi\, d\varpi + 2\pi V^2 \int D^2\, d\varpi.$$

Toutes ces intégrales de volume se rapportent au volume du champ; il s'étend à l'infini, mais, à l'infini, toutes les grandeurs électriques ASD sont nulles; or, nous aurons à faire usage, dans la

Digitized by Google

suite, à plusieurs reprises, de l'intégration par parties, et des intégrales de surface s'introduiront ainsi dans le calcul, mais la surface étant rejetée à l'infini, nous pourrons ne pas en tenir compte.

Formons δT. On a

$$\delta T = \int (m(U\,\delta U) + (A\,\delta S))\, d\varpi.$$

Calculons δS; on a

$$S = \frac{dD}{dt} + eU.$$

Je dis qu'on peut intervertir les signes $\frac{d}{dt}$ et δ et que l'on a

$$\delta S = \frac{d\,\delta D}{dt} + e\,\delta U + U\,\delta e.$$

En effet, remarquons tout d'abord que D ne dépend pas directement du temps; D ne dépend que de la position actuelle de la matière. Soient $(x\ y\ z)$ les coordonnées du point où l'on considère D, $(x'y'z')$ les coordonnées d'un point matériel quelconque, $s'(\delta x'\delta y'\delta z')$ son déplacement virtuel et U' sa vitesse.

On pourra écrire

$$\frac{dD}{dt} = \Sigma(U'\nabla)D,$$

d'où

$$\delta\frac{dD}{dt} = \Sigma(\delta U'\nabla)D + \Sigma\Sigma(U'\nabla)(\delta s'\nabla)D,$$

car

$$\delta D = \Sigma\frac{\partial D}{\partial x'}\delta x' = \Sigma(\delta s'\nabla)D.$$

On a de même

$$\frac{d}{dt}\delta D = \Sigma(\delta U'\nabla)D + \Sigma\Sigma(\delta s'\nabla)(U'\nabla)D.$$

Or les deux sommes doubles sont manifestement identiques l'une à l'autre; on peut donc écrire

$$\delta\frac{dD}{dt} = \frac{d}{dt}\delta D.$$

Nous allons maintenant pouvoir appliquer l'intégration par parties

Digitized by Google

par rapport au temps. Aux limites, les variations s'annulent; si donc nous partons de l'expression

$$\int_0^t \delta T\, dt = \int_0^t dt \int \left[m(U\,\delta U) + \left(A \frac{d\,\delta D}{dt}\right) + (AU)\,\delta e + e(A\,\delta U)\right] d\varpi,$$

l'intégration par parties nous donnera

$$\int_0^t \delta T\, dt = \int_0^t dt \int \left[- m\left(\frac{dU}{dt}\,\delta s\right) - \left(\delta D \frac{dA}{dt}\right) - \left(\overline{e\frac{dA}{dt} + A\frac{de}{dt}},\ \delta s\right) + (AU)\,\delta e\right] d\varpi.$$

On aurait, de même,

$$\int_0^t \delta \Pi\, dt = \int_0^t dt \int [4\pi V^2 (D\,\delta D) + \delta \chi]\, d\varpi.$$

Enfin, par l'application de l'intégration par parties, on a

$$\int_0^t dt \int \psi (\operatorname{div}.\delta D - \delta e)\, d\varpi = \int_0^t \int [\delta D \operatorname{grad}.\psi) + e\,\delta\psi]\, d\varpi.$$

Il suffit maintenant de réunir les résultats précédents pour obtenir l'équation

$$\int^t \left[\delta T\, dt - \delta \Pi\, dt - dt \int \psi (\operatorname{div}.\delta D - \delta e)\, d\varpi\right]$$
$$= \int_0^t dt \int \left[- m\left(\frac{dU}{dt}\,\delta s\right) - \left(\delta D \frac{dA}{dt}\right) + (AU)\,\delta e - e\left(\delta s \frac{dA}{dt}\right) - (A\,\delta s)\frac{de}{dt} - 4\pi V^2 (D\,\delta D) - \delta\chi - (\delta D \operatorname{grad}.\psi + e\,\delta\psi)\right] d\varpi.$$

Nous grouperons les termes du second membre en trois groupes, comprenant : le premier, les termes qui ont δD en facteur; le second, ceux qui ont e en facteur; le troisième groupe est la réunion des deux termes en δe et $\frac{de}{dt}$.

1° Le coefficient de δD est nul, car nous avons déjà vu que l'on a

$$\frac{dA}{dt} + 4\pi V^2 D + \operatorname{grad}.\psi = 0.$$

2° Je dis que le coefficient de e est égal à $4\pi V^2 D$; il est égal à

$$\left(\delta s, - \frac{dA}{dt} - \frac{\delta\psi}{\delta s}\right).$$

Digitized by Google

Or, $\delta\psi$ est la variation de ψ qui résulte du déplacement de la matière dans le champ d'intégration qui est fixe; c'est donc la variation qu'on obtiendrait en supposant la matière immobile, à condition de se déplacer de façon à conserver le même mouvement relatif virtuel; si l'on se déplace ainsi de $-\delta s$, la variation correspondante de ψ sera

$$\delta\psi = -\sum \frac{\partial\psi}{\partial x}\delta x = (\text{grad.}\psi\,\delta s),$$

et, par suite, on a bien, pour le coefficient considéré,

$$-\frac{d\mathrm{A}}{dt} - \text{grad.}\psi = 4\pi \mathrm{V}^2 \mathrm{D},$$

et l'intégrale correspondante devient

$$\int_0^t dt \int d\varpi [e\, 4\pi \mathrm{V}^2 (\mathrm{D}\,\delta s)].$$

3° J'appelle $\int_0^t \mathcal{F}_m dt$ l'ensemble des deux termes restants, soit

$$\mathcal{F}_m = \int \left[(\mathrm{AU})\,\delta e - (\mathrm{A}\,\delta s)\frac{de}{dt}\right] d\varpi.$$

Tout d'abord $\frac{de}{dt}$ est la dérivée par rapport au temps dans l'élément fixe $d\varpi$ de la densité électrique; on a donc, en prenant la différence entre les quantités d'électricité qui entrent et qui sortent à travers la surface de l'élément $d\varpi$,

$$\frac{de}{dt} = -\,\text{div.}\, e\,\mathrm{U}.$$

Ensuite δe est obtenu comme $\delta\psi$ l'a été plus haut, et l'on a

$$\delta e = (\text{grad.}\, e\,\delta s).$$

On a donc

$$\mathcal{F}_m = \int [(\mathrm{AU})(\text{grad.}\, e\,\delta s) + (\mathrm{A}\,\delta s)\,\text{div.}\, e\,\mathrm{U}]\, d\varpi.$$

Nous appliquerons l'intégration par partie, pour mettre e en facteur et nous remarquerons que dans cette transformation U peut être considéré, à l'intérieur de l'électron, comme une quantité indépendante de x, y, z. On suppose en effet que les électrons ne sont pas en rotation sur eux-mêmes. Remarquons aussi qu'en dehors des

Digitized by Google

électrons on a $e = 0$. On n'exclut donc pas pour la matière la possibilité d'avoir des mouvements sensibles tourbillonnaires.

Soient (F, G, H) les composantes de A, $(\delta x, \delta y, \delta z)$ les composantes de δs, (ξ, η, ζ) les composantes de U. On aura

$$\int (AU)(\text{grad.}\, e\,\delta s)\, d\varpi = -\int \Sigma (F\xi + G\eta + H\zeta)\frac{\partial e}{\partial x}\,\delta x\, d\varpi,$$

le signe Σ indiquant qu'il faut prendre les deux autres termes analogues en δy et δz.

L'intégration par parties donne

$$+\int \Sigma e\left(\xi\frac{\partial F}{\partial x} + \eta\frac{\partial G}{\partial x} + \zeta\frac{\partial H}{\partial x}\right)\delta x\, d\varpi.$$

On aura, de même,

$$\int (A\,\delta s)\,\text{div.}\, e\,U\, d\varpi = \int \Sigma F\,\delta x\left(\frac{\partial e\xi}{\partial x} + \frac{\partial e\eta}{\partial y} + \frac{\partial e\zeta}{\partial z}\right) d\varpi,$$

le signe Σ ayant la même signification.

L'intégration par parties donne

$$-\int \Sigma e\left(\xi\frac{\partial F}{\partial x} + \eta\frac{\partial F}{\partial y} + \zeta\frac{\partial F}{\partial z}\right)\delta x\, d\varpi.$$

La somme des deux termes en cause sera

$$\mathcal{F}_m = \int + e\Sigma\left(\xi\frac{\partial F}{\partial x} + \eta\frac{\partial G}{\partial x} + \zeta\frac{\partial H}{\partial x} - \xi\frac{\partial F}{\partial x} - \eta\frac{\partial F}{\partial y} - \zeta\frac{\partial F}{\partial z}\right)\delta x\, d\varpi$$

ou

$$\mathcal{F}_m = \int e\Sigma(\eta\,\text{rot}_z A - \zeta\,\text{rot}_y A)\,\delta x\, d\varpi = \int e\Sigma(\eta H_z - \zeta H_y)\,\delta x\, d\varpi$$

ou

$$\mathcal{F}_m = \int e([UH]\,\delta s)\, d\varpi.$$

Remarquons que χ est indépendant du mouvement de la matière ou de l'électricité, et que par suite on a $\delta\chi = -(\text{grad.}\,\chi\,\delta s)$. Le principe de la moindre action donne donc

$$\int_0^t dt \int \left(-m\frac{dU}{dt} + \text{grad.}\,\chi + 4\pi V^2 De + [UH]e,\ \delta s\right) d\varpi = 0,$$

ce qui montre que la force pondéromotrice par unité de volume,

Digitized by Google

due au champ électrique, a pour expression

$$\mathcal{E} = 4\pi V^2 De + [UH]e.$$

C'est la formule qu'il s'agissait d'obtenir.

Diélectriques. — 1° *Moment diélectrique.* — Considérons, à l'intérieur d'un diélectrique, un ion de charge e; soient Q sa position d'équilibre normal, Q′ sa position forcée, soit q le vecteur QQ′. On appelle moment électrique d'une molécule, l'expression

$$m = \Sigma eq,$$

la sommation étant étendue à tous les ions de la molécule. Si l'on étend la sommation à tous les ions contenus à l'intérieur d'une sphère de volume Ω, l'expression

$$M = \frac{\Sigma eq}{\Omega}$$

définira le moment électrique de l'unité de volume au centre de la sphère. Dès que le rayon de la sphère est assez grand, pour que la sphère contienne un grand nombre de molécules, le moment électrique demeure sensiblement constant quand on fait croître encore le rayon. On donne à ce rayon une valeur bien déterminée et, dans ces conditions, le moment électrique de l'unité de volume devient une fonction continue des coordonnées du centre de la sphère.

2° *Courant de convection.* — Soit $d\sigma$ un élément de surface, très petit par rapport aux distances moléculaires, mais grand relativement à la grosseur d'un ion. Soient P le centre de cet élément et P_ν la normale à $d\sigma$ du côté choisi pour côté positif. Quand les ions sont déplacés de leur position d'équilibre normal, une charge ε traverse $d\sigma$ du côté négatif au côté positif. Déplaçons l'élément $d\sigma$ sans changer ni sa grandeur, ni son orientation, ε dépendra de P. Pour certaines positions de P, on aura $\varepsilon = 0$; pour d'autres, dans lesquelles $d\sigma$ coupe le déplacement QQ′ de l'ion, on aura $\varepsilon = e$, e étant la charge de l'ion correspondant.

Je dis que l'on a, en appelant $\bar{\varepsilon}$ la valeur moyenne de ε,

$$\bar{\varepsilon} = M_\nu \, d\sigma.$$

Digitized by Google

Donnons, en effet, au point P un nombre k très grand de positions uniformément réparties dans la sphère Ω. Chaque ion, dont la position d'équilibre est à l'intérieur de la sphère Ω, traversera, pendant son déplacement, quelques éléments $d\sigma$ et contribuera à donner quelques termes à la somme des ε. Il faut sommer par rapport à un ion et ensuite étendre la sommation à tous les ions.

Pour savoir si un ion placé en Q traverse l'élément $d\sigma$ placé en P, il faut regarder la position relative de P et de Q. Au lieu de donner à P un nombre k de positions différentes dans Ω, on peut laisser P au centre de Ω et donner à Q les k positions relatives correspondantes à l'intérieur de Ω. Mais QQ′ coupera l'élément fixe $d\sigma$, si Q est dans un cylindre parallèle à q, ayant pour base $d\sigma$ et de volume $q_\nu d\sigma$. Le nombre des positions efficaces est donc au nombre k comme $q_\nu d\sigma$ est au volume Ω. Ce nombre est donc $\frac{k}{\Omega} q_\nu d\sigma$ et la somme $\Sigma\varepsilon$, en tant qu'elle provient de l'ion Q, est égale à $\frac{k}{\Omega} e q_\nu d\sigma$. D'où pour la somme complète étendue à tous les ions

$$\Sigma\varepsilon = \frac{k}{\Omega} \Sigma e q_\nu d\sigma$$

ou

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\Sigma\varepsilon}{k} = \frac{\Sigma e q_\nu}{\Omega} d\sigma = \mathrm{M}_\nu d\sigma.$$

Envisageons maintenant une surface fermée quelconque. Soit $\mathcal{E}$ la charge électrique totale incluse, on aura

$$\int \mathrm{D}_\nu d\sigma = \mathcal{E}.$$

Si maintenant e_0 est la densité électrique de l'élément $d\varpi$ dans l'état d'équilibre, on aura : $\mathcal{E} = \int e_0 d\varpi - \Sigma\varepsilon$, la somme étant étendue à tous les éléments $d\sigma$; on aura donc :

$$\int \mathrm{D}_\nu d\sigma + \Sigma\varepsilon = \int e_0 d\varpi;$$

ou, d'après la définition des valeurs moyennes :

$$\int \overline{\mathrm{D}}_\nu d\sigma + \Sigma\bar{\varepsilon} = \int \overline{e}_0 d\varpi$$

ou, comme $\overline{e_0}$ est nul, si le diélectrique n'est pas électrisé au repos,

$$\int (\overline{\mathrm{D}}_\nu + \mathrm{M}_\nu) d\sigma = 0.$$

Digitized by Google

Le vecteur $\overline{D} + E$, somme géométrique de $\overline{D}$ et de M, s'appelle la *polarisation diélectrique;* c'est la résultante du déplacement électrique qui a pour siège l'éther et du moment diélectrique de l'unité de volume.

Si l'on appelle $\mathfrak{D}$ ce nouveau vecteur, on aura

$$\text{div.}\,\mathfrak{D} = 0$$

ou, pour les valeurs moyennes, que nous distinguons par une barre,

$$\text{div.}\,\overline{D} + \text{div.}\,M = 0, \qquad \frac{\Sigma e}{\Omega} = -\,\text{div.}\,M.$$

3° *Vecteur* « *Courant* ». — Le courant s'obtiendra comme suit. Il est égal, par définition, à

$$\frac{\text{rot.}\,\overline{H}}{4\pi}.$$

Or, on a

$$\text{rot.}\,H = 4\pi\left(e\,U + \frac{dD}{dt}\right).$$

Mais

$$\overline{e\,U} = \frac{1}{\Omega}\,\Sigma e\,\frac{dq}{dt} = \frac{dM}{dt};$$

de sorte que l'équation relative aux valeurs moyennes

$$\text{rot}\,\overline{H} = 4\pi\left(\overline{e\,U} + \frac{d\overline{D}}{dt}\right)$$

devient

$$\text{rot.}\,\overline{H} = 4\pi\,\frac{d\mathfrak{D}}{dt};$$

le vecteur courant est donc égal à $\frac{d\mathfrak{D}}{dt}$.

Expression du courant dans le cas d'un milieu en mouvement. — Le courant moyen $\overline{S}$ a pour expression

$$\overline{S} = \frac{\overline{dD}}{dt} + \Sigma\overline{e\,U}.$$

Nous allons trouver l'expression analytique de $\Sigma\overline{e\,U}$ en cherchant la variation du moment diélectrique. Considérons un volume d'intégration très petit; on aura, pour le moment diélectrique moyen $\overline{M}$,

$$\overline{M}\,\Omega = \int M\,d\varpi$$

Digitized by Google

et

$$\mathrm{M} = \Sigma eq.$$

Dans cette expression, q est un vecteur qui représente le segment QQ′ qui joint la position d'équilibre normal d'un ion (e) à sa position actuelle, soient (x, y, z) les coordonnées de la position actuelle Q′, (x_0, y_0, z_0) les coordonnées du point Q du diélectrique, où l'ion se trouve dans l'état d'équilibre. On aura

$$\mathrm{M}_x = \Sigma e(x - x_0).$$

La vitesse U de l'ion a pour composantes

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right).$$

La vitesse d'entraînement est la vitesse V du point Q′ du diélectrique; cette vitesse est une fonction continue des coordonnées.

La vitesse d'entraînement du point Q est $\mathrm{V} - (q\nabla)\mathrm{V}$; elle a pour composantes

$$\left(\frac{dx_0}{dt}, \frac{dy_0}{dt}, \frac{dz_0}{dt}\right).$$

Cela posé, calculons la quantité scalaire

$$\int \frac{d\mathrm{M}_x}{dt} d\varpi.$$

L'accroissement de $\int \mathrm{M} d\varpi$ pendant le temps dt tient à deux causes : 1° les vitesses U et V; 2° l'introduction de nouveaux éléments eq à l'intérieur de la surface d'intégration, par suite du mouvement du milieu. L'accroissement dû à cette seconde cause de $\int \mathrm{M}_x d\varpi$ est

$$- dt \int \mathrm{div.}\, \mathrm{M}_x \mathrm{V}\, d\varpi.$$

On aura donc

$$\int \frac{d\mathrm{M}_x}{dt} d\varpi = - \int \mathrm{div.}\, \mathrm{M}_x \mathrm{V}\, d\varpi + \Sigma e \frac{dx}{dt} - \Sigma e \frac{dx_0}{dt},$$

et l'on a

$$\Sigma e \frac{dx}{dt} - \Sigma e \frac{dx_0}{dt} = \Sigma e \mathrm{U}_x - \Sigma e(\mathrm{V}_x - (q\nabla)\mathrm{V}_x).$$

Or on a, pour la densité électrique $\bar{e}$ de l'élément $d\varpi$,

$$\bar{e} = \frac{\Sigma e}{\Omega} = - \mathrm{div.}\, \mathrm{M},$$

Digitized by Google

d'où

$$\Sigma e V_x = -\int V_x \operatorname{div}. M \, d\varpi$$

et

$$\Sigma e (q\nabla) V_x = \int (M\nabla) V_x \, d\varpi$$

et, par suite,

$$-\Sigma e \left(V_x - (q\nabla) V_x \right) = \int \left(V_x \operatorname{div}. M - (M\nabla) V_x \right) d\varpi.$$

Mais, d'après une formule connue, on a

$$V_x \operatorname{div}. M - (M\nabla) V_x = \operatorname{div}. V_x M;$$

d'où

$$\Sigma e \frac{dx}{dt} - \Sigma e \frac{dx_0}{dt} = \Sigma e U_x + \int \operatorname{div}. V_x M \, d\varpi$$

et, par suite,

$$\int \frac{dM_x}{dt} d\varpi = \Sigma e U_x - \int \operatorname{div}. M_x V \, d\varpi + \int \operatorname{div}. V_x M \, d\varpi.$$

Or, on a

$$\operatorname{div}. M_x V = \frac{\partial M_x V_x}{\partial x} + \frac{\partial M_x V_y}{\partial y} + \frac{\partial M_x V_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{div}. V_x M = \frac{\partial V_x M_x}{\partial x} + \frac{\partial V_x M_y}{\partial y} + \frac{\partial V_x M_z}{\partial z}$$

et par différence

$$\operatorname{div}. V_x M - \operatorname{div}. M_x V = \frac{\partial (V_x M_y - M_x V_y)}{\partial y} - \frac{\partial (V_z M_x - V_x M_z)}{\partial z},$$

d'où

$$-\int \operatorname{div}. M_x V \, d\varpi + \int \operatorname{div}. V_x M \, d\varpi = \int \operatorname{rot}_x [VM] \, d\varpi$$

et, par suite,

$$\Sigma e U_x = \int d\varpi \left(S_x - \frac{dD_x}{dt} \right) = \int \frac{dM_x}{dt} d\varpi + \int \operatorname{rot}_x [MV] \, d\varpi;$$

d'où

$$\overline{S} = \frac{d\overline{D}}{dt} + \frac{d\overline{M}}{dt} + \operatorname{rot}. [\overline{MV}].$$

Toutes les quantités qui figurent dans cette égalité variant d'une façon continue, on peut supprimer les barres qui indiquent des valeurs moyennes.

Digitized by Google

On remarque donc que l'on a

$$\int_\sigma \frac{d\mathrm{M}_\nu}{dt}\,d\sigma = \int \left(\mathrm{S} - \frac{d\mathrm{D}}{dt}\right)_\nu d\sigma + \int \mathrm{rot}_\nu[\mathrm{M}, -\mathrm{V}]\,d\sigma;$$

cette dernière intégrale est égale à

$$\int_s (ds[\mathrm{M}, -\mathrm{V}]),$$

c'est-à-dire au flux coupé du vecteur M, quand on suppose le diélectrique immobile et le circuit (s) qui entoure (σ) animé d'une vitesse $-\mathrm{V}$ égale et contraire à celle de la matière; ce qui revient au même que de supposer le circuit immobile et le diélectrique animé de la vitesse V, qu'il a réellement. Ainsi l'intégrale

$$\int \frac{d\mathrm{M}_\nu}{dt}\,d\sigma$$

a pour valeur, dans le cas d'un diélectrique mobile, l'intégrale

$$\int \left(\mathrm{S} - \frac{d\mathrm{D}}{dt}\right)_\nu d\sigma,$$

qui est sa valeur pour le cas d'un diélectrique immobile, augmentée du flux coupé dans le mouvement relatif.

Loi de l'induction électromagnétique. — La théorie électronique de la conductibilité métallique permet d'établir la loi d'Ohm et de montrer que la densité électrique moyenne dans l'intérieur du conducteur parcouru par un courant est égale à zéro; le courant peut être divisé en filets, le long desquels l'intensité se conserve. Considérons l'un de ces filets : soient ds l'élément de longueur, ω la section droite, e la charge d'un ion positif, e' la charge d'un ion négatif, $\mathrm{N}dt$ le nombre d'ions positifs qui traversent ω pendant le temps dt dans le sens positif, $\mathrm{N}'dt$ le nombre d'ions négatifs qui traversent ω pendant le même temps en sens opposé. Soit i l'intensité du courant; on aura

$$i = \mathrm{N}e + \mathrm{N}'e'.$$

Soient E_s et E'_s les forces électriques qui agissent sur un ion positif ou négatif dans la direction de ds, la loi d'Ohm apprend que N et N′ sont proportionnels aux valeurs moyennes de E_s et de E'_s; on aura

Digitized by Google

donc, p et q étant deux coefficients constants :

$$N = p\overline{E}_s\omega, \qquad N' = q\overline{E}'_s\omega;$$

la force électrique a pour expression

$$E = 4\pi V^2 D + [UH].$$

Soient U_e la vitesse d'entraînement du filet conducteur, U_r la vitesse relative de l'ion, qui est tangentielle; on aura géométriquement

$$U = U_e + U_r,$$
$$[U_r H]_s = 0$$

et, par suite,

$$E_s = E'_s = 4\pi V^2 D_s + [U_e H]_s.$$

Affectons d'un trait les valeurs moyennes pour les distinguer des valeurs individuelles, il vient

$$i\int \frac{ds}{(pe + qe')\omega} = \int ds \left\{ 4\pi V^2 \overline{D}_s + \left[U_e \overline{H}\right]_s \right\}.$$

Posons

$$R = \int \frac{ds}{(pe + qe')\omega};$$

je dis que la f. e. m. Ri sera égale, d'après la formule connue relative à la variation d'une intégrale de surface, à $-\frac{d}{dt}\int H_\nu\, dS$, la surface étant bordée par le filet. On a en effet

$$4\pi V^2 \operatorname{rot}. D = -\frac{dH}{dt};$$

de plus, on peut ajouter $-U_e \operatorname{div}. H$, puisque $\operatorname{div}. H$ est nul; par suite, il vient, d'après la formule de Stokes, qui sert à transformer une intégrale de ligne en une intégrale de surface,

$$Ri = \int (4\pi V^2 \operatorname{rot}. \overline{D} - U_e \operatorname{div}. \overline{H} + \operatorname{rot}. [U_e \overline{H}]_\nu)\, dS,$$

ν étant le vecteur unité normal à dS; or le second membre est bien égal, d'après une formule connue, à

$$-\frac{d}{dt}\int H_\nu\, dS,$$

résultat conforme aux lois ordinaires de l'induction.

Digitized by Google

Proposition de Poynting. — Le travail de la composante $e[UH]$ est toujours nul, car on a

$$(U[UH]) = 0.$$

Donc le travail de la force électrique $\mathcal{E}$ pendant le temps dt se réduit à

$$4\pi V^2\, dt \int e(DU)\, d\varpi.$$

Soit $-d\chi$ le travail des forces extérieures, soit $d\mathfrak{E}$ l'énergie mécanique du système, on aura

$$-d\chi = d\mathfrak{E} - 4\pi V^2\, dt \int e(DU)\, d\varpi.$$

Remplaçons eU par sa valeur

$$4\pi eU = \text{rot.H} - 4\pi \frac{dD}{dt},$$

il vient

$$-d\chi = d\mathfrak{E} - V^2\, dt \int (D \text{ rot.H})\, d\varpi + 4\pi V^2\, dt \int \left(D \frac{dD}{dt}\right) d\varpi.$$

Or, d'après une formule connue, on a, ν étant dirigé vers l'extérieur,

$$\int (D \text{ rot.H})\, d\varpi = \int (H \text{ rot.D})\, d\varpi - \int [DH]_\nu\, dS$$

et les équations du mouvement de l'éther donnent

$$-4\pi V^2 \text{ rot.D} = \frac{dH}{dt};$$

d'où

$$-V^2 \int (D \text{ rot.H})\, d\varpi = \frac{1}{4\pi} \int \left(H \frac{dH}{dt}\right) d\varpi + V^2 \int [DH]_\nu\, dS$$

et, par suite,

$$-d\chi = d\left[\mathfrak{E} + \int \frac{H^2}{8\pi}\, d\varpi + 2\pi V^2 \int D^2\, d\varpi\right] + V^2\, dt \int [DH]_\nu\, dS.$$

Donc, le travail des forces extérieures est égal à l'accroissement de l'énergie $\mathfrak{E} + W_m + W_e$, qui est localisée dans le champ, et de la quantité représentée par l'intégrale complémentaire, qui est un flux. Ce flux est le flux par unité de temps de la quantité d'énergie que le champ rayonne à l'infini; la densité de ce flux est $V^2[DH]_\nu$ par unité de surface.

Digitized by Google

Quantité de mouvement électromagnétique. — Nous avons déjà démontré l'identité

$$\int (\mathrm{H}\,\mathrm{div}.\mathrm{H} + [\mathrm{rot}.\mathrm{H},\,\mathrm{H}])\,d\varpi = \frac{1}{2}\int (\mathrm{H}(\nu_e \mathrm{H}) + [[\nu_e \mathrm{H}]\mathrm{H}])\,d\mathrm{S}$$

et nous savons que les intégrales de surface ci-après, où H et E désignent les intensités des champs magnétiques et électriques, savoir, en unités électromagnétiques

$$\int p_m\,d\mathrm{S} = \frac{1}{8\pi}\int (\mathrm{H}(\nu_e \mathrm{H}) + [[\nu_e \mathrm{H}]\mathrm{H}])\,d\mathrm{S},$$
$$\int p_e\,d\mathrm{S} = \frac{1}{8\pi \mathrm{V}^2}\int (\mathrm{E}(\nu_e \mathrm{E}) + [[\nu_e \mathrm{E}]\mathrm{E}])\,d\mathrm{S}$$

représentent les résultantes des pressions de Maxwell p_m et p_e dues respectivement aux champs électrique et magnétique.

Appliquons la formule rappelée ci-dessus à l'intensité du champ magnétique H. Nous avons

$$\mathrm{div}.\mathrm{H} = 0, \qquad \frac{\mathrm{rot}.\mathrm{H}}{4\pi} = \frac{d\mathrm{D}}{dt} + e\mathrm{U};$$

et il vient

$$\int \left[\frac{d\mathrm{D}}{dt}\mathrm{H}\right] d\varpi + \int e[\mathrm{UH}]\,d\varpi = \int p_m\,d\mathrm{S}.$$

Appliquons-la, de même, au champ électrique $\mathrm{E} = 4\pi \mathrm{V}^2 \mathrm{D}$; nous avons

$$\mathrm{div}\,\mathrm{E} = 4\pi \mathrm{V}^2\,\mathrm{div}\,\mathrm{D} = 4\pi \mathrm{V}^2 e,$$
$$\mathrm{rot}.\mathrm{E} = -\frac{d\mathrm{H}}{dt}$$

et, par suite,

$$\int 4\pi \mathrm{V}^2 e\,\mathrm{D}\,d\varpi - \int \left[\frac{d\mathrm{H}}{dt}\mathrm{D}\right] d\varpi = \int p_e\,d\mathrm{S};$$

d'où, par addition

$$\int (4\pi \mathrm{V}^2 e\,\mathrm{D} + e[\mathrm{UH}])\,d\varpi = \int p_m\,d\mathrm{S} + \int p_e\,d\mathrm{S} + \frac{d}{dt}\int [\mathrm{HD}]\,d\varpi.$$

Le premier terme du premier membre est la force due au champ électrique, le second est la force due au mouvement des électrons et au champ magnétique. Le premier terme du second membre est la pression de Maxwell qui équilibre les actions électrostatiques, le second terme est la pression de Maxwell qui, dans un champ constant, équilibre les actions du champ magnétique; le terme com-

Digitized by Google

plémentaire représente la force qui équilibre la poussée due à la quantité de mouvement électromagnétique de l'éther. Celle-ci est répartie dans l'espace avec la densité [DH].

On voit que ce dernier terme se compose de deux parties : l'une, en $\frac{d\mathrm{D}}{dt}$, est l'action sur le courant de déplacement électrique, l'autre, en $\frac{d\mathrm{H}}{dt}$, est ce qu'on pourrait appeler l'action sur le courant de déplacement magnétique.

Intégration des équations de Lorentz. — *Rappel des équations de cette théorie.* — 1° Le potentiel électrostatique ψ est donné, en fonction de la densité électrique, par l'équation

$$\Delta\psi = -4\pi \mathrm{V}^2 e.$$

2° Le potentiel vecteur A est donné en fonction du courant total S par l'équation

$$\Delta \mathrm{A} = -4\pi \mathrm{S}.$$

3° Le champ magnétique H est la rotation du potentiel vecteur

$$\mathrm{H} = \mathrm{rot.A}.$$

4° Le courant S et le champ magnétique H sont liés par la relation

$$4\pi \mathrm{S} = \mathrm{rot.H}.$$

5° Le déplacement D dépend du moment électromagnétique et du gradient de potentiel

$$4\pi \mathrm{V}^2 \mathrm{D} + \frac{d\mathrm{A}}{dt} = \mathrm{grad.}\psi.$$

6° Il y a une liaison entre le déplacement et la densité électrique

$$\mathrm{div.\,D} = e.$$

7° Il y en a une aussi entre la densité électrique et le courant de convection $e\mathrm{U}$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div.}e\mathrm{U} = 0.$$

8° Des équations ci-dessus (2°, 3°, 4°) on tire

$$\mathrm{div.\,A} = 0,$$

équation qui avec (3°) détermine A, en fonction de H.

Digitized by Google

Énoncé du problème. — On se donne e et U ; on considère donc comme connu le mouvement de tous les ions; il s'agit d'en déduire les autres grandeurs électriques, en particulier H et D.

Le potentiel retardé. — Considérons une matière attirante répartie dans un milieu. Soit $d\varpi'$ un élément de volume placé au point $Q(x'y', z')$ et contenant, à l'époque t, la quantité $f(x', y', z; t)\,d\varpi'$ de matière attirante. Le potentiel ψ en un point $P(x, y, z)$, si l'on appelle r la distance PQ

$$[r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2],$$

sera donné par la formule

$$\psi = \int \frac{f(x'y'z', t)}{r}\, d\varpi'.$$

Si V désigne la vitesse de propagation des ondulations électriques, le potentiel retardé ψ' est défini par la formule

$$\psi' = \int \frac{f\left(x'y'z', t - \frac{r}{V}\right)}{r}\, d\varpi'.$$

C'est le potentiel d'une matière attirante dont la densité $f\left(x'y'z'; t - \frac{r}{V}\right)$ dépend, non seulement, des coordonnées $(z'y'z')$ du point Q où est l'élément $d\varpi'$, mais encore, à cause de la présence de r, des coordonnées $(x\,y\,z)$ du point P.

Équation différentielle à laquelle satisfait le potentiel retardé. — Je dis que l'on a

$$\Delta\psi' - \frac{1}{V^2}\frac{d^2\psi'}{dt^2} = -4\pi f(x, y, z; t)$$

ou, d'après une notation courante,

$$\square\,\psi' = -4\pi f.$$

A cet effet, remarquons que l'on a, par définition,

$$\psi = \int \frac{f(x'y'z'; t)}{r}\, d\varpi'$$

Digitized by Google

et, en vertu d'un théorème connu,

$$\Delta\psi = -4\pi f(x, y, z; t).$$

Considérons la fonction $\psi' - \psi$

$$\psi' - \psi = \int \left[f\left(x', y', z'; t - \frac{r}{V}\right) - f(x', y', z'; t) \right] \frac{d\varpi'}{r}.$$

Quand le point Q se rapproche du point P, la distance $r = PQ$ tend vers zéro; le numérateur de la quantité à intégrer tend donc vers zéro, en même temps que le dénominateur. Nous admettons alors que le rapport tend vers une limite finie. Dans ces conditions, nous pouvons appliquer la règle de dérivation sous le signe $\int$ et écrire

$$\Delta\psi' - \Delta\psi = \int \Delta \frac{f\left(x', y', z'; t - \frac{r}{V}\right) - f(x', y', z'; t)}{r} d\varpi'.$$

Or, en dérivant par rapport à x, par exemple, on a

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{f(x', y', z'; t)}{r} = f(x', y', z'; t) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right);$$

et, par suite, on a par addition des équations analogues,

$$\Delta \frac{f(t)}{r} = f(t)\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0.$$

En ne laissant en évidence que les variables qui dépendent de x, y, z, on peut écrire $f\left(t - \frac{r}{V}\right)$ au lieu de $f\left(x', y', z'; t - \frac{r}{V}\right)$; et l'on a à calculer $\Delta\left[f\left(t - \frac{r}{V}\right)\frac{1}{r}\right]$. Je pose

$$F = \frac{f\left(t - \frac{r}{V}\right)}{r},$$

$$\frac{1}{r} = u, \qquad t - \frac{r}{V} = v,$$

c'est-à-dire

$$F = u f(v),$$

$$v = t - \frac{1}{V u},$$

u étant le potentiel dû à une masse égale à l'unité, agissant par

Digitized by Google

conséquent avec une force égale en valeur absolue à $\frac{1}{r^2}$; de sorte qu'on a

$$\Delta u = 0 \qquad \text{et} \qquad \Sigma u_x'^2 = \frac{1}{r^4}.$$

Cela posé, on a

$$v_x' = \frac{1}{V u^2} u_x'$$

et

$$F_x' = u_x' f(v) + u f_v' v_x' = u_x' \left(f + \frac{1}{uV} f_v' \right)$$

et

$$F_{x^2}'' = u_{x^2}'' \left(f + \frac{1}{uV} f' \right) + u_x' \left(f' \frac{1}{V u^2} u_x' - \frac{1}{u^2 V} u_x' f' + \frac{1}{uV} f' \frac{1}{V u^2} u_x' \right)$$

ou, en supprimant les termes qui se détruisent,

$$F_{x^2}'' = \left(f + \frac{1}{uV} f' \right) u_{x^2}'' + u_x'^2 f'' \frac{1}{V^2 u^3}$$

et, par addition, en tenant compte des valeurs de Δu et de $\Sigma u_x'^2$,

$$\Delta F = \frac{1}{r} f'' \frac{1}{V^2}.$$

Mais on a évidemment

$$f_{v^2}' = f_{t^2}'' ;$$

d'où

$$\Delta F = \frac{1}{V^2} \frac{f_{t^2}''}{r} = \frac{1}{V^2} \frac{d^2}{dt^2} F$$

et par conséquent

$$\Delta \psi' - \Delta \psi = \frac{1}{V^2} \int \frac{1}{r} \frac{d^2}{dt^2} f \left(x', y', z' ; t - \frac{r}{V} \right) d\varpi',$$

ce qui, en vertu de la règle de dérivation sous le signe $\int$, peut s'écrire

$$\Delta \psi' - \Delta \psi = \frac{1}{V^2} \frac{d^2}{dt^2} \psi'.$$

Remplaçons $\Delta \psi$ par sa valeur $-4\pi f$, il reste

$$\square \psi' = -4\pi f.$$

Ainsi donc, la solution de l'équation différentielle que nous venons d'écrire est le potentiel retardé. Si l'on part du repos et que les fonctions s'annulent à l'infini, il n'y a pas d'autre solution, de sorte que $\square A = \square B$ entraîne $A = B$.

Digitized by Google

Application aux équations de Lorentz. — 1° Le potentiel retardé ψ' étant défini par

$$\square\psi' = -4\pi V^2 e$$

et le potentiel vecteur retardé A′ étant défini par

$$\square A' = -4\pi e U,$$

nous allons montrer que le déplacement D et le champ magnétique H se déduisent facilement de ψ' et de A′.

2° Calcul de H. On a

$$H = \text{rot. } A;$$

d'où, en intervertissant l'ordre des dérivations,

$$\square H = \text{rot. } \square A.$$

Or, on a

$$\Delta A = -4\pi S;$$

d'où

$$\square A = -4\pi S - \frac{1}{V^2}\frac{d^2 A}{dt^2}.$$

Or, par définition,

$$\square A' = -4\pi e U;$$

d'où, par différence,

$$\square A - \square A' = -4\pi(S - eU) - \frac{1}{V^2}\frac{d^2 A}{dt^2};$$

or, on a

$$S - eU = \frac{dD}{dt} \qquad \text{et} \qquad 4\pi V^2 D + \frac{dA}{dt} = \text{grad. } \psi;$$

d'où

$$-4\pi(S - eU) - \frac{1}{V^2}\frac{d^2 A}{dt^2} = -\frac{1}{V^2}\frac{d}{dt}\left(4\pi V^2 D + \frac{dA}{dt}\right) = -\frac{1}{V^2}\text{grad.}\frac{d\psi}{dt}$$

et, par suite,

$$\square A - \square A' = -\frac{1}{V^2}\text{grad.}\frac{d\psi}{dt};$$

d'où

$$\text{rot. } \square A - \text{rot. } \square A' = 0$$

et, par conséquent,

$$\square H = \text{rot. } \square A' = \square \text{ rot. } A'$$

ou

$$H = \text{rot. } A'.$$

3° Calcul de D. On a

$$4\pi\left(\frac{dD}{dt} + eU\right) = \text{rot. } H$$

Digitized by Google

ou

$$4\pi\frac{d\mathrm{D}}{dt} = \square\,\mathrm{A}' + \text{rot. rot. A}'.$$

Mais, d'après une formule connue,

$$\text{rot. rot. A}' = -\Delta\mathrm{A}' - \text{grad. div. A}';$$

d'où

$$4\pi\frac{d\mathrm{D}}{dt} = \square\,\mathrm{A}' - \Delta\mathrm{A}' - \text{grad. div. A}',$$

ou

$$4\pi\frac{d\mathrm{D}}{dt} = -\frac{1}{\mathrm{V}^2}\frac{d^2\mathrm{A}'}{dt^2} - \text{grad. div. A}'.$$

Mais on a

$$\frac{de}{dt} = -\,\text{div.}\,e\,\mathrm{U}$$

ou

$$-\frac{1}{4\pi\mathrm{V}^2}\frac{d}{dt}\square\,\psi' = +\frac{\text{div.}\square\mathrm{A}'}{4\pi}$$

ou

$$-\square\,\frac{1}{\mathrm{V}^2}\frac{d\psi'}{dt} = \square\,\text{div.A}'$$

ou

$$-\frac{1}{\mathrm{V}^2}\frac{d\psi'}{dt} = \text{div.A}'.$$

D'où il résulte, en remplaçant div. A′ par sa valeur dans l'expression de $\frac{d\mathrm{D}}{dt}$,

$$4\pi\frac{d\mathrm{D}}{dt} = -\frac{1}{\mathrm{V}^2}\frac{d^2\mathrm{A}'}{dt^2} + \frac{1}{\mathrm{V}^2}\frac{d}{dt}\,\text{grad.}\,\psi'$$

et, par suite,

$$4\pi\mathrm{V}^2\mathrm{D} + \frac{d\mathrm{A}'}{dt} = \text{grad.}\,\psi',$$

la constante additionnelle devant être nulle, puisqu'on part du repos, où toutes les grandeurs électriques sont nulles simultanément.

Cette équation donne donc D en fonction de A′ et de ψ′.

4° On remarquera que l'équation

$$\text{div}\,\mathrm{A} = 0$$

est remplacée, pour le potentiel vecteur retardé, par

$$\text{div}\,\mathrm{A}' + \frac{1}{\mathrm{V}^2}\frac{d\psi'}{dt} = 0.$$

De plus A est le potentiel vecteur du courant total; tandis que A′ est le potentiel vecteur retardé du courant de convection seul.

Digitized by Google

CHAPITRE IX.

PROPAGATION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES.

Propagation des discontinuités dans le champ électromagnétique. — Proposons-nous d'éliminer Q, R, α, β, γ entre les six équations du champ électromagnétique, de façon à obtenir une équation en P.

A cet effet, considérons la première équation

$$4\pi\left(cP + \frac{K}{4\pi}\frac{\partial P}{\partial t}\right) = \frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial y}.$$

Différentions-la par rapport au temps; il vient, en intervertissant les dérivations,

$$4\pi\left(c\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{K}{4\pi}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \beta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \gamma}{\partial t}.$$

Or

$$-K'\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}, \qquad \ldots.$$

Donc, en substituant, il vient

$$\begin{aligned} 4\pi K'\left(c\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{K}{4\pi}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right) &= -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \\ &= \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial z}\right) \\ &= \Delta P - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right). \end{aligned}$$

Or, si le milieu n'est pas électrisé, on a

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

Si, de plus, nous supposons que le milieu ne soit pas conducteur,

Digitized by Google

l'équation se réduira à

$$K\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \Delta P.$$

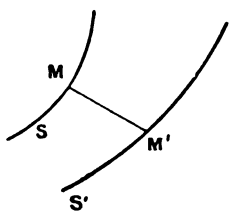
P, Q, R satisfont donc à des équations aux dérivées partielles du second ordre.

Supposons que ces fonctions P, Q, R éprouvent des discontinuités le long d'une surface S dont l'équation est

$$f(x, y, z, t) = 0;$$

que, par exemple, P soit égal à φ_1 d'un côté de la surface S et à φ_2 de

Fig. 77.



l'autre côté de cette surface, φ_1 et φ_2 étant deux fonctions différentes de x, y, z.

Soient S la position de la surface à l'instant t, S' sa position à l'instant $t + dt$. Soit $M(x, y, z)$, un point de la surface S

$$f(x, y, z, t) = 0;$$

menons en M la normale à la surface S qui rencontre en

$$M'(x + dx, y + dy, z + dz)$$

la surface S', dx, dy, dz étant les éléments de la normale

$$MM' = dn.$$

Ces éléments seront déterminés par les équations

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{dn}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

$$f(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) = 0.$$

Digitized by Google

Cette dernière équation est équivalente à

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}\partial y + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0.$$

Il vient donc

$$h\,dn + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0,$$

en posant

$$h = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}, \qquad \text{ou} \qquad V = -\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{h};$$

en posant

$$V = \frac{dn}{dt};$$

cette quantité V est ce que, par définition, nous appellerons la *vitesse de propagation en* (x, y, z) *de la discontinuité*.

La fonction P éprouve sur la surface S une discontinuité

$$\delta P = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Si φ_1 et φ_2 sont des fonctions continues qui admettent des dérivées, on aura, en dérivant par rapport à x,

$$\frac{\partial}{\partial x}\delta P = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \delta\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \delta\frac{\partial P}{\partial x}.$$

On peut donc intervertir les signes de dérivation et de variation.

Cela posé, supposons que les dérivées secondes des fonctions P, Q, R éprouvent une discontinuité sur la surface S, mais restent finies. Il en résultera que les dérivées premières et les fonctions P, Q, R varieront d'une façon continue.

Les dérivées du second ordre devront satisfaire à certaines conditions de compatibilité géométriques et cinématiques que nous allons chercher.

Pour simplifier l'écriture, posons

$$\frac{\partial P}{\partial x} = X_1, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = X_2, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = X_3, \qquad \frac{\partial P}{\partial t} = X', \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = X_{11}, \qquad \ldots$$

X_1, X_2, X_3, X' variant d'une façon continue, on aura

$$\delta X_1 = 0, \qquad \delta X_2 = 0, \qquad \delta X_3 = 0, \qquad \delta X' = 0.$$

1° Donnons à t une valeur numérique; comme les quantités δX_1,

Digitized by Google

δX_2, δX_3 sont nulles tout le long de S, leurs différentielles totales prises le long de S sont nulles; si donc dx, dy, dz vérifient l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0, \tag{1}$$

on aura

$$\begin{cases} \delta X_{11}\,dx + \delta X_{12}\,dy + \delta X_{13}\,dz = 0, \\ \delta X_{21}\,dx + \delta X_{22}\,dy + \delta X_{23}\,dz = 0, \\ \delta X_{31}\,dx + \delta X_{32}\,dy + \delta X_{33}\,dz = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Les coefficients de dx, dy, dz dans chacune des équations (2) doivent être proportionnels à

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z},$$

et si je pose pour abréger

$$h = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2},$$

je pourrai écrire

$$\delta X_{11} = \frac{\lambda}{h^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2, \qquad \delta X_{22} = \frac{\lambda}{h^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2, \qquad \delta X_{33} = \frac{\lambda}{h^2}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2,$$

$$\delta X_{23} = \frac{\lambda}{h_2}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad \delta X_{31} = \frac{\lambda}{h^2}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \delta X_{12} = \frac{\lambda}{h^2}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Telles sont les conditions de compatibilité géométriques.

2° En second lieu, comme $\delta X' = 0$ à l'époque t, sa différentielle totale est nulle, c'est-à-dire que l'on a

$$\delta X'_1\,dx + \delta X'_2\,dy + \delta X'_3\,dz = 0,$$

pour les valeurs de dx, dy, dz satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0;$$

on a donc

$$\delta X'_1 = \frac{\lambda_1}{h}\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \delta X'_2 = \frac{\lambda_1}{h}\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \delta X'_3 = \frac{\lambda_1}{h}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Posons

$$\delta\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \lambda_2.$$

3° Maintenant, faisons varier la variable t et écrivons que la discon-

Digitized by Google

tinuité subsiste sous forme de surface. On aura

$$\delta X_1 = 0,$$

et, par suite, si dx, dy, dz satisfont à l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0, \tag{3}$$

on aura

$$\delta X_{11}\,dx + \delta X_{12}\,dy + \delta X_{13}\,dz + \delta X_1'\,dt = 0.$$

D'où

$$\frac{\delta X_1'}{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\delta X_{11}}{\frac{\partial f}{\partial x}},$$

ou

$$\frac{\frac{\lambda_1}{h}\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\frac{\lambda}{h^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial x}} \qquad \text{ou} \qquad \lambda_1 = \frac{\lambda}{h}\frac{\partial f}{\partial t};$$

en prenant la différentielle totale de $\delta X'$, on obtiendra par un calcul semblable

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{h}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\lambda}{h^2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2,$$

c'est-à-dire

$$\lambda_2 = -V\lambda_1 = V^2\lambda.$$

Mais on a vu que

$$kk'\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \Delta P,$$

par suite

$$kk'\delta\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \delta\,\Delta P.$$

Or

$$\delta\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \lambda_2,$$

$$\delta\,\Delta P = \delta X_{11} + \delta X_{22} + \delta X_{33} = \frac{\lambda}{h^2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right] = \lambda.$$

Donc

$$kk'\lambda_2 = \lambda;$$

d'où l'on déduit, puisque

$$\frac{\lambda_2}{\lambda} = V^2,$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{kk'}}.$$

Telle est la vitesse de propagation d'une discontinuité du second ordre.

Digitized by Google

Propriétés du front de l'onde. — *Le vecteur électrique au front de l'onde est transversal.* — Si, au lieu de considérer P, nous avions considéré Q, tous les calculs précédents subsisteraient; mais, pour éviter la confusion, nous remplacerions λ, λ_1, λ_2 par μ, μ_1, μ_2 respectivement; si nous considérions R, nous remplacerions ces quantités par ν, ν_1, ν_2; mais alors l'équation

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

deviendra, si l'on prend la variation de la dérivée par rapport à x,

$$\delta \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \delta \frac{\partial^2 Q}{\partial x\, \partial y} + \delta \frac{\partial^2 R}{\partial x\, \partial z} = 0;$$

ce qui s'écrira, en tenant compte des relations

$$\delta \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\lambda}{h^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2,$$

$$\delta \frac{\partial^2 Q}{\partial x\, \partial y} = \frac{\mu}{h^2}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\delta \frac{\partial^2 R}{\partial x\, \partial z} = \frac{\nu}{h^2}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z},$$

sous la forme

$$\frac{1}{h^2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial f}{\partial y} + \nu \frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0.$$

Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ était nul, on prendrait en considération la dérivée par rapport à y ou à z.

Cette équation prouve donc que le vecteur (λ, μ, ν) est perpendiculaire à la normale à la surface de discontinuité et il en sera de même des vecteurs $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$, puisque ces trois vecteurs sont parallèles. Il en sera de même du vecteur $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 R}{\partial t^2}\right)$ et par suite du vecteur électrique (P, Q, R) au front de l'onde.

Le vecteur magnétique au front de l'onde est transversal. — Si nous étions partis de l'équation en $-\frac{\partial \alpha}{\partial t}$, que nous eussions dérivé par rapport à t, nous aurions trouvé, en supposant le milieu dépourvu de conductibilité, et tenant compte de l'équation

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0,$$

Digitized by Google

exprimant que dans un élément de volume quelconque, la masse magnétique est toujours nulle

$$KK'\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} = \Delta\alpha.$$

En raisonnant sur le vecteur magnétique (α, β, γ) d'une façon toute semblable au raisonnement fait sur le vecteur électrique (P, Q, R) on trouvera également que, au front de l'onde, le vecteur magnétique est transversal.

Au front de l'onde, les deux vecteurs électrique et magnétique sont perpendiculaires l'un à l'autre. — En effet, considérons l'équation

$$-K'\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y};$$

on en déduira

$$-K'\delta\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial t} = \delta\frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial z} - \delta\frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial y},$$

d'où, en accentuant les constantes $\lambda', \lambda'_1, \lambda'_2$; μ', μ'_1, μ'_2; ν', ν'_1, ν'_2, qui se rapportent à l'intensité du champ magnétique

$$-K'\frac{\lambda'_1}{h}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\mu}{h^2}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\nu}{h^2}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x},$$

ou

$$-K'\lambda'_1 = \frac{\mu}{h}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\nu}{h}\frac{\partial f}{\partial y};$$

on aurait de même

$$-K'\mu'_1 = \frac{\nu}{h}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\lambda}{h}\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$-K'\nu'_1 = \frac{\lambda}{h}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mu}{h}\frac{\partial f}{\partial x},$$

ce qui prouve que le vecteur $(\lambda'_1, \mu'_1, \nu'_1)$ est transversal (ce que nous savions déjà) et de plus perpendiculaire au vecteur (λ, μ, ν).

Au front de l'onde les énergies électrique et magnétique par unité de volume sont égales. — De plus, si nous faisons la somme des carrés, nous obtenons

$$K'^2(\lambda'^2_1 + \mu'^2_1 + \nu'^2_1) = (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)\frac{1}{h^2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]$$
$$-\left(\frac{\lambda}{h}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\mu}{h}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\nu}{h}\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2,$$

Digitized by Google

ce qui, en vertu de la transversabilité de (λ, μ, ν) et de la valeur de h, se réduit à

$$K'^2(\lambda_1'^2 + \mu_1'^2 + \nu_1'^2) = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2.$$

Or

$$\lambda_1' = -V\lambda'. \qquad \lambda_1'^2 = V^2\lambda'^2 = \frac{\lambda'^2}{KK'}.$$

De même

$$\mu_1'^2 = \frac{\mu'^2}{KK'}, \qquad \nu_1'^2 = \frac{\nu'^2}{KK'}.$$

Donc

$$K(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) = K'(\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2).$$

L'égalité obtenue exprime la propriété annoncée.

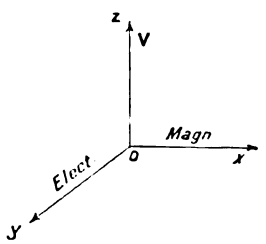
Sens de progression de la discontinuité, d'après l'orientation des vecteurs électrique et magnétique.

On a

$$+ K'V\lambda' = \frac{\mu}{h}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\nu}{h}\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \ldots.$$

Donc λ', λ et $\left(\frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial z}\right)$ sont orientés comme Ox, Oy, Oz

Fig. 78.



(*fig.* 78). Or le déplacement du front de l'onde en (x, y, z) est un vecteur dn qui a pour composantes

$$dx = \frac{dn}{h}\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad dy = \frac{dn}{h}\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad dz = \frac{dn}{h}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Donc λ', λ, dn forment un trièdre de même signe que Ox, Oy, Oz; donc λ' et λ sont parallèles aux vecteurs magnétique et électrique.

Ondes planes. — On dit qu'on a affaire à une onde plane parallèle

Digitized by Google

au plan des yz, lorsque, en un point quelconque du milieu, on a

$$P = 0, \qquad \alpha = 0.$$

Si donc à l'instant initial on a

$$P = 0, \qquad \alpha = 0,$$

pour qu'on ait encore ces mêmes égalités à l'instant suivant, il faut qu'on ait aussi

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0.$$

On aura alors, en vertu des équations du champ électrodynamique,

$$\frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} = 0,$$

c'est-à-dire que, dans le plan de l'onde, l'intensité du champ magnétique et l'intensité du champ électrique dériveront d'un potentiel.

Inversement, supposons qu'à l'époque t on ait

$$P = 0, \qquad \alpha = 0,$$

et que les champs magnétique et électrique dérivent d'un potentiel; en vertu des équations du champ électrodynamique, on en déduira

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0,$$

c'est-à-dire que X et α continueront à être nuls. Les ondes resteront donc indéfiniment planes et parallèles au plan.

Les équations du champ électrodynamique se réduisent, dans le cas des ondes planes à

$$K \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \qquad -K' \frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial x},$$
$$K \frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial \beta}{\partial x}, \qquad -K' \frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x},$$

ceci en supposant le milieu homogène et parfaitement isolant.

Posons

$$\xi = P\sqrt{K}, \qquad \eta = Q\sqrt{K}, \qquad \zeta = R\sqrt{K},$$
$$\xi' = \alpha\sqrt{K'}, \qquad \eta' = \beta\sqrt{K'}, \qquad \zeta' = \gamma\sqrt{K'},$$

Digitized by Google

et

$$a = \frac{1}{\sqrt{KK'}} \qquad \text{(vitesse de propagation des discontinuités).}$$

Les équations du champ électrodynamique, avec ces notations, se réduisent à

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} = a\frac{\partial \zeta'}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -a\frac{\partial \eta'}{\partial x},$$
$$-\frac{\partial \eta'}{\partial t} = a\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \zeta'}{\partial t} = a\frac{\partial \eta_1}{\partial x},$$

ou

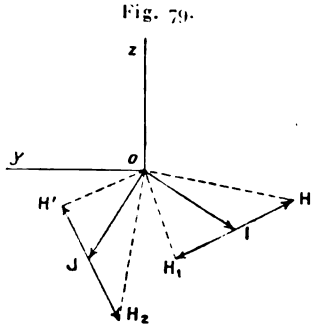
$$\frac{\partial(\eta + \sqrt{-1}\,\zeta)}{\partial t} = a\frac{\partial(\zeta' - \sqrt{-1}\,\eta')}{\partial x},$$
$$\frac{\partial(\zeta' - \sqrt{-1}\,\eta')}{\partial t} = a\frac{\partial(\eta + \sqrt{-1}\,\zeta)}{\partial x}.$$

La solution générale de ce système d'équations aux dérivées partielles est

$$\eta + \sqrt{-1}\,\zeta = \frac{1}{2}[f(x+at, y, z) + \varphi(x-at, y, z)],$$
$$\zeta' + \sqrt{-1}\,\eta' = \frac{1}{2}[f(x+at, y, z) - \varphi(x-at, y, z)].$$

Portons (*fig.* 79) dans le plan des yz un vecteur OI égal à $\frac{1}{2}f(x+at, y, z)$, lequel se propage vers les x négatifs, un vecteur IH égal à $\varphi(x-at, y, z)$, lequel se propage vers les x positifs, alors

Fig. 79.



le vecteur OH représente $\eta_1 + \sqrt{-1}\,\zeta$; si je prends $\overline{IH_1} = -\overline{IH}$, le vecteur OH_1 représente $\zeta' - \sqrt{-1}\,\eta'$, et si je fais tourner la figure

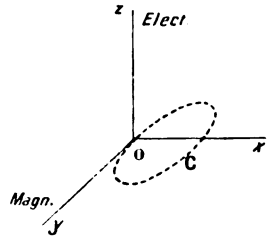
Digitized by Google

OIHH$_1$ de $+\frac{\pi}{2}$, les points I, H, H$_1$ prennent respectivement les positions J, H$_2$, H′, et OH′ égal et perpendiculaire à OH$_1$ est égal à $\eta' + \zeta'\sqrt{-1}$.

Le vecteur OH représente donc le vecteur électrique et le vecteur OH′ le vecteur magnétique; l'onde OH, OH′ est donc décomposable en deux autres ondes OI, OJ d'une part, et IH, JH′, d'autre part. La première onde (OI, OJ) se propage vers les x négatifs, la seconde (IH, JH′), vers les x positifs.

On retiendra facilement ce sens, en supposant qu'un conducteur parallèle à Oz parcouru par un courant dirigé suivant Oz vers les z

Fig. 80.



positifs ait pour trace sur le plan des xy le cercle C tangent en O à Oy (*fig.* 80); puisqu'il y a dissipation d'énergie dans le conducteur sous forme de chaleur de Joule, c'est qu'au point O le sens de la propagation de l'onde est Ox. Au point O le vecteur électrique est suivant Oz et le vecteur magnétique suivant Oy.

On retrouve pour chacune des deux ondes partielles (OI, OJ) et (IH, JH′) les caractères que nous avons précédemment trouvés pour le front de propagation d'une discontinuité de second ordre.

En effet, les vecteurs électrique h et magnétique h' sont bien perpendiculaires; de plus, les modules OI, OJ d'une part, IH, JH′ d'autre part, sont égaux à

$$h\sqrt{\mathrm{K}} = h'\sqrt{\mathrm{K}'}$$

et par suite, par unité de volume, l'énergie magnétique de chaque onde partielle est égale à l'énergie électrique.

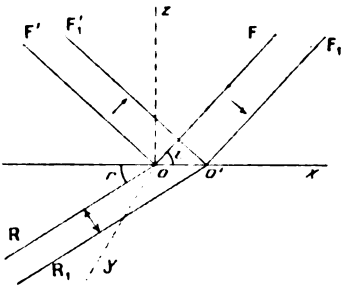
Réflexion et réfraction des ondes à la surface de séparation de deux milieux diélectriques. — Soit AB le plan de séparation des

Digitized by Google

deux milieux diélectriques (*fig.* 81); nous le prendrons pour plan des xy; soit Oy la trace sur ce plan d'une onde plane à l'instant t; soit Oz la normale au plan de séparation.

Soit OF la trace de l'onde plane sur le plan des zx; les ondes ren-

Fig. 81.



contrent la surface de séparation sous l'incidence i, et nous prenons la direction positive de l'axe des x dans le sens de propagation des ondes.

Dans le premier milieu, la vitesse de propagation des ondes est

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{K_1 \mu_1}},$$

et, dans le second milieu, elle est

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{K_2 \mu_2}}.$$

Supposons que les milieux (1) et (2) aient même perméabilité

$$\mu_1 = \mu_2 = 1$$

et supposons, de plus,

$$K_1 = 1.$$

Cela revient à admettre comme unité de longueur celle de la vitesse V_1.

Nous admettons le principe de Huygens : l'onde incidente OF donne lieu à une onde réfléchie plane OF' et à une onde réfractée OR.

Si au bout du temps dt, l'onde F est venue en F_1, on a

$$\frac{OO'}{dt} = \frac{V_1}{\sin i} = \frac{V'_1}{\sin i'} = \frac{V_2}{\sin r}.$$

Digitized by Google

Comme

$$V'_1 = V_1,$$

on a

$$i = i'.$$

L'indice de réfraction est

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{V_1}{V_2} = \sqrt{K_2},$$

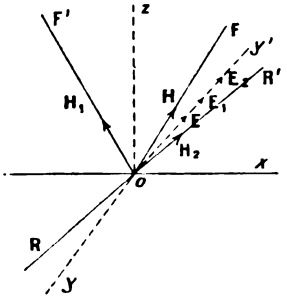
ou simplement

$$n = \sqrt{K},$$

l'indice n'étant plus utile; K est le pouvoir inducteur spécifique du milieu (2) par rapport au milieu (1). La relation $K = n^2$ est la relation de Maxwell.

Premier cas : L'intensité électrique est perpendiculaire au plan d'incidence. — Soient E, E_1, E_2 (*fig.* 82) les intensités électriques

Fig. 82.



pour l'onde incidente, l'onde réfléchie et l'onde réfractée. Si ces vecteurs sont dirigés vers les y négatifs, les vecteurs magnétiques H, H_1, H_2 pour ces mêmes ondes seront dirigés respectivement suivant OF, OF', OR' en vertu du sens de propagation admis, et l'on a, en raison de l'égalité des énergies électrique et magnétique par unité de volume

$$H = E,$$
$$H_1 = E_1,$$
$$H_2 = E_2\sqrt{K}.$$

On a donc le Tableau des composantes ci-après :

Tableau des composantes de l'intensité du champ électrique E

Digitized by Google

et du champ magnétique H, *dans le cas où l'intensité du champ électrique est une vibration perpendiculaire au plan d'incidence.*

On remarque que le sens de propagation, la vibration électrique et l'intensité magnétique sont orientés respectivement comme Ox, Oy, Oz (Est, Sud, Zénith). On remarque aussi que les angles i, $180^\circ - i'$, et r jouent le même rôle par rapport aux ondes incidentes, réfléchies et réfractées :

		Ox	Oy	Oz
Onde incidente....	électrique	0	$-E$	0
	magnétique	$E\cos i$	0	$E\sin i$
» réfléchie....	électrique	0	$-E_1$	0
	magnétique	$-E_1\cos i$	0	$E_1\sin i$
» réfractée....	électrique	0	$-E_2$	0
	magnétique	$E_2\sqrt{K}\cos r$	0	$E_2\sqrt{K}\sin r$

Écrivons que les composantes tangentielles dans les deux milieux de la force électrique et de l'induction magnétique sont continues

$$(1)\qquad \begin{aligned} E + E_1 &= E_2, \\ (E - E_1)\cos i &= E_2\sqrt{K}\cos r. \end{aligned}$$

Cette dernière relation s'écrit en tenant compte de la loi des sinus

$$\sqrt{K} = \frac{\sin i}{\sin r},$$

$$(2)\qquad E - E_1 = E_2\frac{\sin i}{\sin r}\frac{\cos r}{\cos i}.$$

Des relations (1) et (2) on déduit facilement

$$E_2 = 2E\frac{\sin r\cos i}{\sin(i+r)},$$

$$E_1 = -E\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)};$$

on retrouve ainsi les formules de Fresnel.

On aurait pu aussi écrire que la composante normale de l'induction magnétique est continue

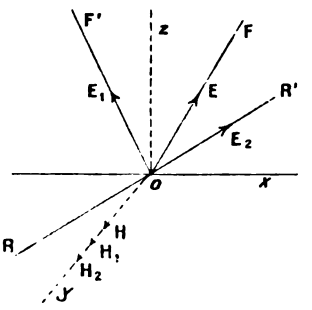
$$(E + E_1)\sin i = E_2\sqrt{K}\sin r,$$

mais ce n'est pas une équation distincte, car en tenant compte de la relation (1), on retombe sur la loi des sinus.

Digitized by Google

Deuxième cas : L'intensité électrique est dans le plan d'incidence. — Supposons (*fig.* 83) les intensités électriques E, E_1, E_2,

Fig. 83.



dirigées suivant OF, OF', OR'; alors les intensités magnétiques

$$H = E, \qquad H_1 = E_1, \qquad H_2 = E_2\sqrt{K}$$

seront dirigées suivant Oy. On aura le Tableau ci-après des composantes :

Tableau des composantes de l'induction du champ électrique KE *et de l'intensité du champ magnétique* $E\sqrt{K}$ *dans le cas où l'intensité du champ électrique est une vibration située dans le plan d'incidence.*

		Ox	Oy	Oz
Onde incidente.....	électrique (induction)	$E\cos i$	o	$E\sin i$
	magnétique	o	E	o
» réfléchie	électrique (induction)	$-E_1\cos i$	o	$E_1\sin i$
	magnétique	o	E_1	o
» réfractée.....	électrique (induction)	$KE_2\cos r$	o	$KE_2\sin r$
	magnétique	o	$E_2\sqrt{K}$	o

Écrivons que les composantes tangentielles des intensités électriques et magnétiques sont continues

$$(1) \qquad (E - E_1)\cos i = E_2\cos r,$$

$$(2) \qquad E + E_1 = E_2\sqrt{K} = E_2\frac{\sin i}{\sin r}.$$

Digitized by Google

D'autre part, la surface de séparation des deux milieux n'étant pas électrisée, on peut écrire que le flux d'induction électrique suivant Oz se conserve; d'où

$$E \sin i + E_1 \sin i = K E_2 \sin r;$$

mais cette relation combinée avec (2) donne

$$\sin i = \sqrt{K} \sin r,$$

ce qui est la loi des sinus; on n'a donc pas ainsi de relation distincte des précédentes.

Cette remarque étant faite, des équations (1) et (2) on déduit aisément

$$E_2 = \frac{2 E \sin r \cos i}{\sin(i + r) \cos(i - r)},$$

$$E_1 = E \frac{\operatorname{tang}(i - r)}{\operatorname{tang}(i + r)}.$$

Ce sont les formules de Fresnel.

L'ensemble de ces formules a donné lieu aussi à quelques vérifications expérimentales dans le cas des oscillations électriques rapides.

Ondes cylindriques périodiques dans un conducteur. — Nous avons obtenu précédemment l'équation

$$K \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + 4\pi c \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \Delta P,$$

en supposant que le milieu n'était pas électrisé.

Dans le cas présent, supposons que nous ayons affaire à des ondes cylindriques arrivant à la surface d'un conducteur métallique parallèle à Oz.

Le terme $K \frac{\partial^2 P}{\partial t}$ est négligeable par rapport au terme $\frac{\partial P}{\partial t}$, même pour des oscillations électriques très rapides (*voir* pourtant Broca).

Le vecteur électrique étant supposé parallèle à Oz, on a

$$P = 0, \qquad Q = 0,$$

et la seule équation qui subsiste est

$$4\pi c \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \Delta R.$$

Digitized by Google

Intégrons pour un volume U limité par une surface S

$$\int_U 4\pi c \frac{\partial R}{\partial t} d\varpi = \frac{1}{\mu} \int_U \Delta R \, d\varpi = \frac{1}{\mu} \int_S \left(l \frac{\partial R}{\partial x} + m \frac{\partial R}{\partial y} + n \frac{\partial R}{\partial z} \right) dS.$$

L'intégrale de surface représente le flux sortant total du vecteur $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$. Dans le cas d'un système centré sur l'axe des z, ce vecteur est $\frac{\partial Z}{\partial r}$, r étant la distance de l'axe des z du point où l'on envisage le vecteur en question.

Appliquons cette égalité au volume cylindrique infiniment petit de hauteur dz ayant pour base la couronne comprise entre les deux cercles de rayons r et $r + dr$, il vient :

$$4\pi c \frac{\partial R}{\partial t} 2\pi r \, dr \, dz = \frac{1}{\mu} \left[2\pi (r + dr) \left(\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} dr \right) - 2\pi r \frac{\partial R}{\partial r} \right] dz.$$

Il n'y a pas, en effet, de flux à travers les bases; et il reste

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} - 4\pi c \mu \frac{\partial R}{\partial t} = 0.$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles à laquelle doit satisfaire l'intensité du champ électrique à l'intérieur du conducteur, et par suite le courant, puisque

$$i = cE.$$

C'est une équation linéaire en R; nous allons rechercher une solution périodique; pour cela, nous poserons

$$R = A e^{i\omega t},$$

A ne dépendant plus de t, A satisfera à l'équation

$$\frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA}{dr} - 4\pi c \mu i \omega A = 0.$$

C'est une équation de Bessel.

Si nous posons

$$\alpha = 4\pi c \mu \omega,$$

on sait qu'une solution de l'équation de Bessel est

$$f = \sum_0 \frac{(\alpha i)^n r^{2n}}{(2^n n!)^2} = u + iv.$$

Digitized by Google

et l'intégrale générale est

$$A = C_1 f + C_2 f \int \frac{dr}{r f^2},$$

C_1 et C_2 étant deux constantes arbitraires (1).

---

(1) *Intégration de l'équation de Bessel :*

$$\frac{d^2A}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dA}{dr} - (\alpha i)A = 0.$$

Nous pouvons facilement obtenir une intégrale particulière. Posons

$$f = 1 + a_1 r^2 + \ldots + a_{n-1} r^{2(n-1)} + a_n r^{2n} + \ldots,$$

nous aurons

$$f' = 2a_1 r + \ldots + 2n a_n r^{2n-1} + \ldots,$$
$$\frac{1}{r}f' = 2a_1 + \ldots + 2n a_n r^{2(n-1)} + \ldots,$$
$$f'' = 2a_1 + \ldots + 2n(2n-1) a_n r^{2(n-1)} + \ldots;$$

d'où, en reportant dans l'équation de Bessel et annulant les coefficients des diverses puissances de r

$$(2n)^2 a_n = (\alpha i) a_{n-1},$$
$$2^2 (n-1)^2 a_{n-1} = (\alpha i) a_{n-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2^2 a_1 = (\alpha i).$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$a_n (2^2)^n (n!)^2 = (\alpha i)^n.$$

d'où

$$f = \sum_0^\infty \frac{(\alpha i)^n r^{2n}}{(2n!)^2}.$$

On peut dès lors trouver l'intégrale générale. Posons

$$A = f\psi,$$

f étant la solution particulière précédente :

$$A' = f'\psi + \psi' f,$$
$$A'' = f''\psi + 2f'\psi' + \psi'' f;$$

d'où

$$\psi\left(f'' + \frac{1}{r}f - (\alpha i)f\right) + \psi'\left(2f' + \frac{1}{r}f\right) + \psi'' f = 0,$$

ou, puisque le coefficient de ψ est nul,

$$\frac{\psi''}{\psi'} + \frac{1}{r} + \frac{2f'}{f} = 0,$$

Digitized by Google

Si nous supposons que le conducteur cylindrique soit plein et de rayon ρ, l'intégrale $A = C_1 f$ nous suffira; soit donc

$$R = C_1 f e^{i\omega t}$$

et prenons seulement la partie imaginaire

$$R = C_1 (u \sin\omega t + v \cos\omega t).$$

Nous déterminerons la constante C_1 en écrivant que le courant total a une valeur efficace déterminée.

Si H est le champ magnétique, on a

$$H = \frac{2I}{\rho}.$$

Or, les équations du champ électromagnétique donnent la relation

$$-\mu \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial R}{\partial r};$$

donc

$$2I = H\rho = \frac{\rho}{\mu} \int_0^t \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)_{r=\rho} dt = \frac{C_1 \rho}{\mu\omega} [-u' \cos\omega t + v' \sin\omega t].$$

Si I_0 est le module de I (dans la représentation géométrique des quantités périodiques), on aura

$$C_1 = \frac{2 I_0 \omega \mu}{\rho \sqrt{u'^2 + v'^2}}.$$

La constante d'intégration C_1 étant ainsi obtenue, la fonction

$$R = C_1 (u \sin\omega t + v \cos\omega t)$$

indique la façon dont le courant varie en chaque point, en fonction

---

ou, en intégrant

$$\log\psi' + \log r + 2\log f = \log C_2,$$

ou

$$\psi' = \frac{C_2}{r f^2}$$

et

$$\psi = C_1 + C_2 \int \frac{dr}{r f^2}$$

et enfin

$$A = f\psi = C_1 f + C_2 f \int \frac{dr}{r f^2}.$$

Telle est l'intégrale générale.

Digitized by Google

de la distance de ce point à l'axe. Or

$$u = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{\alpha r^2}{4}\right)^{2n},$$

$$v = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\alpha r^2}{4}\right)^{2n+1},$$

u et v étant des séries procédant suivant les puissances entières de r^2, on voit que le courant est surtout localisé à la superficie du conducteur.

Résistance ohmique apparente du conducteur. — Connaissant R et H, il est facile d'avoir la résistance ohmique apparente R_0 de l'unité de longueur du conducteur. Il suffit d'écrire que la quantité d'énergie qui pénètre dans l'unité de temps à l'intérieur du conducteur est égale à $\frac{1}{2} R_0 I_0^2$, I_0 étant la valeur maxima du courant moyen total I.

Or, le vecteur radiant est

$$\frac{1}{4\pi} RH,$$

$$\frac{1}{2} R_0 I_0^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{4\pi} RH . 2\pi\rho\, dt.$$

Mais on a

$$R = C_1 (u \sin\omega t + v\cos\omega t),$$

$$H = \frac{C_1}{\mu\omega}(-u'\cos\omega t + v'\sin\omega t).$$

Donc l'élément placé sous le signe d'intégration est

$$dt\,\frac{RH\rho}{2} = dt\,\frac{C_1^2\rho}{2\mu\omega}[uv'\sin^2\omega t - vu'\cos^2\omega t - (uu' - vv')\sin\omega t\cos\omega t],$$

d'où

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{RH\rho}{2}\,dt = \frac{1}{T}\,\frac{C_1^2\rho}{2\mu\omega}\left(\frac{uv' - vu'}{2}\right)T = I_0^2\,\frac{\omega\mu}{\rho}\left(\frac{uv' - vu'}{u'^2 + v'^2}\right).$$

Donc

$$R_0 = \frac{2\omega\mu}{\rho}\left(\frac{uv' - vu'}{u'^2 + v'^2}\right)_{r=\rho}.$$

Mais, si l'on désigne par u'_s et v'_s les dérivées de u et v par rapport

Digitized by Google

à $s = \frac{\alpha r^2}{4}$ on a

$$u' = u'_s \frac{\alpha r}{2} = 2\pi c \mu \omega r u'_s,$$

$$v' = 2\pi c \mu \omega r v'_s;$$

donc

$$R_0 = \frac{1}{\pi \rho^2 c} \left(\frac{u v'_s - v u'_s}{u'^2_s + v'^2_s} \right)_{r=\rho} = R_1 \left(\frac{u v'_s - v u'_s}{u'^2_s + v'^2_s} \right)_{r=\rho},$$

où

$$R_1 = \frac{1}{\pi \rho^2} \frac{1}{c}$$

est la résistance par unité de longueur en courant permanent.

Remarque. — Nous avons supposé dans ce qui précède le conducteur plein; si le conducteur cylindrique était creux, il faudrait recourir à l'intégrale générale de l'équation de Bessel contenant deux constantes arbitraires, et l'on déterminerait ces deux constantes en écrivant que la valeur moyenne du courant est I_0 sur le cercle extérieur et nulle sur le cercle intérieur.

Autre remarque. — La fonction

$$V = e^{i\omega t + \frac{X \cos\varphi + Y \sin\varphi}{p}}$$

satisfait évidemment à l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} = 4\pi c \mu \frac{\partial V}{\partial t};$$

elle représente une onde qui se propage avec une vitesse constante; en substituant dans l'équation aux différentielles partielles, on obtient

$$\frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{p^2} = 4\pi c \mu i \omega,$$

ou

$$p = \frac{1}{\sqrt{4\pi c \mu i \omega}}.$$

L'onde plane élémentaire

$$\frac{1}{\pi} d\varphi \, e^{i\omega t + \frac{X \cos\varphi + Y \sin\varphi}{p}}$$

progresse dans la direction déterminée par l'angle φ; elle prend

Digitized by Google

en M, point dont les coordonnées sont $X = r$, $Y = 0$, la valeur

$$\frac{1}{\pi} d\varphi\, e^{i\omega t + \frac{r\cos\varphi}{p}}$$

et, par suite, si l'on intègre de 0 à π, on doit avoir un résultat

$$Z = \frac{1}{\pi} e^{i\omega t} \int_0^{\pi} e^{\frac{r\cos\varphi}{p}} d\varphi,$$

qui n'est plus fonction que de r et qui doit satisfaire à l'équation de Bessel

$$\frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dA}{dr} - 4\pi c\mu i\omega A = 0.$$

Effectivement, en mettant cette valeur de Z à la place de A, l'équation devient

$$\frac{1}{\pi} e^{i\omega t} \int_0^{\pi} \left(\frac{\cos^2\varphi}{p^2} + \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{p} - 4\pi c\mu\omega i \right) e^{\frac{r\cos\varphi}{p}} d\varphi = 0.$$

Or, si l'on pose

$$p = \frac{1}{\sqrt{4\pi c\mu\omega i}},$$

le premier membre devient

$$\frac{1}{\pi} e^{i\omega t} \int_0^{\pi} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} e^{\frac{r\cos\varphi}{p}} \frac{\sin\varphi}{p} \right) d\varphi,$$

quantité nulle, évidemment, puisque $\sin\varphi$ s'annule, pour $\varphi = 0$ et pour $\varphi = \pi$, c'est-à-dire aux limites. Nous avons donc bien une solution particulière.

En développant en série, on a

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\frac{r\cos\varphi}{p}} d\varphi = \sum_0^{\infty} \frac{r^n}{p^n} \int_0^{\pi} \frac{\cos^n\varphi}{n!} d\varphi \qquad (n, \text{entier});$$

or

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^{2m}\varphi\, d\varphi = \frac{(2m)!}{m!^2} \frac{1}{2^{2m}}, \qquad \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^{2m+1}\varphi\, d\varphi = 0.$$

Donc il vient

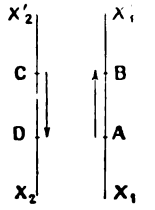
$$Z = e^{i\omega t} \sum_0^{\infty} \frac{r^{2m}}{p^{2m}} \frac{1}{(m!)^2} \frac{1}{2^{2m}}.$$

C'est la formule donnée plus haut, avec $p = \frac{1}{\alpha i}$.

Digitized by Google

Équations des télégraphistes. — *Établissement de l'équation.* — Soit $X_1X'_1$, $X_2X'_2$ une ligne télégraphique à double fil (*fig.* 84); nous la supposons parcourue par un courant variable, et nous nous

Fig. 84.



proposons d'écrire les équations qui régissent la propagation de ce courant. Pour fixer les idées, nous admettons que le fil d'aller et le fil de retour sont des cylindres de révolution dont les axes sont parallèles. Nous portons notre attention sur les phénomènes qui se passent entre deux plans de section droite, situés respectivement aux distances x et $x+dx$ de l'origine et qui coupent les axes des deux fils aux points AB, DC respectivement.

Conditions simplificatrices. — Quand le circuit est isolé à ses deux extrémités et que le fil $X_1X'_1$ est maintenu au potentiel V_0+v, tandis que le fil $X_2X'_2$ est maintenu au potentiel V_0, le champ électrique stable qui s'établit entre les deux fils, a ses lignes de flux situées dans des plans normaux aux fils et ce champ électrostatique dérive d'un potentiel.

Quand le circuit est le siège d'un courant permanent, cette distribution ne subsiste plus, parce que les surfaces des conducteurs du courant cessent d'être des surfaces équipotentielles, mais le champ continue à dériver d'un potentiel. Si la différence de potentiel le long de chacun des deux conducteurs n'est pas très grande et si l'on considère la partie du circuit comprise entre deux points qui sont peu éloignés l'un de l'autre, la surface de chacun des deux fils peut, dans cette région, être considérée comme sensiblement équipotentielle. A titre de première approximation, on peut alors admettre que le champ est le même que le champ électrostatique qui existerait dans cette région si l'excès de potentiel du fil $X_1X'_1$ sur le fil $X_2X'_2$ était partout égal à l'excès actuel v du potentiel de AB sur celui de CD.

Digitized by Google

A l'intérieur du conducteur $X_1X'_1$ ou du conducteur $X_2X'_2$ parcouru par un courant permanent, la distribution du champ électrique dérive aussi d'un potentiel, et les surfaces équipotentielles sont des plans de section droite; les lignes de flux de la force électrique éprouvent donc un changement brusque de direction à la surface des conducteurs. A l'intérieur de chacun des conducteurs, la chute de potentiel sera donnée par la loi d'Ohm; nous admettrons encore que la distribution du courant ne varie que lentement au fur et à mesure qu'on s'éloigne de l'origine, que la distribution des filets, à l'intérieur des conducteurs, est la même dans la région ABCD considérée que si elle était due à un courant permanent d'intensité partout égale à l'intensité actuelle i du courant qui règne dans cet intervalle.

De même, quand le circuit est parcouru par un courant constant, le brin AB étant parcouru par un courant i de A vers B et le brin CD d'un courant de même intensité de C vers D, il y a, dans le milieu situé entre les deux fils, un champ magnétique dont les lignes de flux sont dans des plans normaux aux fils, l'intensité du champ dérivant, à l'extérieur des conducteurs, d'un potentiel, d'ailleurs non uniforme. Si le courant, sans être constant, varie cependant assez lentement, la distribution jouira encore à chaque instant des mêmes caractères; si le courant est différent d'un point à l'autre le long des conducteurs, mais si cette différence entre deux points peu éloignés est peu importante, on pourra encore admettre que l'intensité du champ magnétique dans la région considérée est partout la même que dans le cas du courant permanent pour l'intensité i qui y règne actuellement; en particulier l'intensité du courant aura une densité constante à l'intérieur de la section droite du fil d'aller et une autre densité de valeur constante à l'intérieur de la section droite du fil de retour; ces deux densités pouvant être égales si les surfaces des deux sections sont égales l'une à l'autre.

Si nous admettons ces restrictions, tant pour le champ électrique que pour le champ magnétique, on pourra considérer les mêmes constantes que dans le cas des charges constantes ou des courants constants. La capacité du fil d'aller par rapport au fil de retour sera la même que pour les charges statiques; la résistance de chaque conducteur sera la même que pour les courants permanents; la self-induction du circuit sera la même en chaque point que celle qui correspond à l'énergie $\frac{1}{2}Li^2$ pour un courant permanent i.

Digitized by Google

Notations. — Soit alors, par unité de longueur :

γ, la capacité du brin d'aller par rapport au brin de retour;

ρ, la résistance ohmique, c'est-à-dire la somme de la résistance r_1 du fil 1 et de la résistance r_2 du fil 2, toutes les deux par unité de longueur;

λ, le coefficient de self-induction, correspondant au flux moyen embrassé par un courant constant égal à l'unité;

σ, la conductance du milieu imparfaitement isolant qui sépare le fil d'aller du fil de retour et qui est due aussi au défaut des supports.

Nous avons à appliquer deux lois : la loi du courant de déplacement et la loi de l'induction.

1° *Loi du courant de déplacement ou loi de continuité.* — Nous considérons une surface fermée composée d'une surface latérale cylindrique entourant le fil X_1X_1' limitée à deux bases de section droite à la hauteur des points A et B. Soient i le courant entrant en A, $i+\frac{di}{dx}dx$ le courant sortant en B; soit v l'excès du potentiel de AB sur le potentiel de CD, et soit $\sigma dx v$ le courant de perte de AB vers CD qui traverse la surface latérale; soit $\int \frac{kh_n}{4\pi} dS$ la charge électrostatique du conducteur AB, on peut aussi la prendre égale à $\gamma dx v$; le courant de déplacement allant de AB vers CD est $\int \frac{k}{4\pi}\frac{dh_n}{dt} dS$ ou $\gamma dx \frac{dv}{dt}$. La loi de continuité indique que le courant de déplacement prolonge le courant de conduction. On a donc

$$i-\left(i+\frac{di}{dx}dx\right)-\sigma v\,dx=\gamma\,dx\frac{dv}{dt},$$

ou

$$-\frac{di}{dx}=\left(\sigma+\gamma\frac{d}{dt}\right)v.$$

2° *Loi de l'induction.* — Le travail de la force électrique le long d'un chemin ABCD est égal à la dérivée, changée de signe, du flux de force magnétique, qui traverse le rectangle ABCD.

Le long de AB, la différence de potentiel est $r_1 dx i$; le long de CD, elle est égale à $r_2 dx i$; et, par suite, la somme des travaux de la force électrique, pour les deux chemins AB et CD est égale à $\rho i dx$; de D

Digitized by Google

en A, la différence de potentiel est $-v$; de B en C, elle est $v+\frac{dv}{dx}dx$. Donc, le long du contour complet, le travail de la force électrique est

$$-v+\left(v+\frac{dv}{dx}dx\right)+\rho i\,dx.$$

Ce travail est égal à $-\lambda\,dx\frac{di}{dt}$.

On aura donc

$$-\frac{dv}{dx}=\left(\rho+\lambda\frac{d}{dt}\right)i.$$

En résumé, les deux équations du problème sont :

$$-\frac{di}{dx}=\left(\sigma+\gamma\frac{d}{dt}\right)v,$$
$$-\frac{dv}{dx}=\left(\rho+\lambda\frac{d}{dt}\right)i.$$

Je dis qu'il y a une fonction Φ telle qu'on ait

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=i(x,t), \tag{1}$$

$$\left(\rho+\lambda\frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi=-v(x,t). \tag{2}$$

En effet, de la première équation, on tire

$$\Phi=\int_a^x i(\xi,t)\,d\xi+\psi(t);$$

d'où, en dérivant,

$$\left(\rho+\lambda\frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi=\int_a^x\left(\rho+\lambda\frac{\partial}{\partial t}\right)i(\xi,t)\,d\xi+\left(\rho+\lambda\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi(t),$$

mais on a

$$\left(\rho+\lambda\frac{\partial}{\partial t}\right)i(\xi,t)=-\frac{\partial}{\partial\xi}v(\xi,t);$$

d'où

$$\left(\rho+\lambda\frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi=-\int_a^x\frac{\partial}{\partial\xi}v(\xi,t)\,d\xi+\left(\rho+\lambda\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi(t).$$

Or, on a

$$\int_a^x\frac{\partial}{\partial\xi}v(\xi,t)\,d\xi=v(x,t)-v(a,t).$$

Digitized by Google

D'où, en reportant dans l'équation (2) l'expression de $\left(\rho + \lambda \frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi$,

$$v(a, t) + \left(\rho + \lambda \frac{\partial}{\partial t}\right)\psi(t) = 0;$$

d'où

$$\psi = -\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{\rho}{\lambda} t} \int_b^t e^{\frac{\rho}{\lambda} z} v(a, z)\, dz.$$

Donc il vient, en définitive,

$$\Phi = \int_a^x i(\xi, t)\, d\xi - \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{\rho}{\lambda} t} \int_b^t e^{\frac{\rho}{\lambda} z} v(a, z)\, dz.$$

Si l'on se donne $\Phi(x, t)$ et $\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x, t)$ pour $t = 0$, on aura pour $t = 0$, les valeurs de i et de v.

Inversement, si l'on se donne pour $t = 0$ les valeurs de i et de v, on aura celles de Φ et de $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$.

Cherchons donc l'équation aux dérivées partielles à laquelle Φ doit satisfaire.

On a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = i,$$

$$\left(\rho + \lambda \frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi = -v.$$

Reportons ces valeurs dans l'équation

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = \left(\sigma + \gamma \frac{\partial}{\partial t}\right) v.$$

Il vient

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \left(\sigma + \gamma \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\rho + \lambda \frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi.$$

Simplification de l'équation en Φ. — L'équation des télégraphistes

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} = \left(\rho + \lambda \frac{d}{dt}\right)\left(\sigma + \gamma \frac{d}{dt}\right)\Phi$$

peut se simplifier :

1° On peut, par exemple, faire disparaître le terme en Φ. Il suffit

Digitized by Google

de poser : soit

$$\Phi = \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{\sigma}{\gamma} t} \pi,$$

soit

$$\Phi = \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{\lambda}{\rho} t} \pi.$$

Prenons, par exemple, le premier cas. On a

$$\pi = \gamma e^{\frac{\sigma}{\gamma} t} \Phi,$$

d'où

$$\frac{d\pi}{dt} = e^{\frac{\sigma}{\gamma} t} \left(\sigma + \gamma \frac{d}{dt}\right) \Phi,$$

ou

$$\left(\sigma + \gamma \frac{d}{dt}\right) \Phi = e^{-\frac{\sigma}{\gamma} t} \frac{d\pi}{dt}$$

et l'équation devient

$$\left(\rho + \lambda \frac{d}{dt}\right) \left(e^{-\frac{\sigma}{\gamma} t} \frac{d\pi}{dt}\right) = \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{\sigma}{\gamma} t} \frac{d^2\pi}{dx^2};$$

équation sans terme en π, qui peut s'écrire

$$(\gamma\rho - \lambda\sigma) \frac{d\pi}{dt} + \lambda\gamma \frac{d^2\pi}{dt^2} = \frac{d^2\pi}{dx^2}.$$

2° On peut, au contraire, faire disparaître le terme en $\frac{d\Phi}{dt}$. On a, en effet, symboliquement

$$\left(\rho + \lambda \frac{d}{dt}\right) \left(\sigma + \gamma \frac{d}{dt}\right) = \frac{1}{4\lambda\gamma} \left[\left(2\lambda\gamma \frac{d}{dt} + \lambda\sigma + \gamma\rho\right)^2 - (\lambda\sigma - \gamma\rho)^2\right].$$

D'où

$$\frac{1}{4\lambda\gamma} \left[\left(2\lambda\gamma \frac{d}{dt} + \lambda\sigma + \gamma\rho\right)^2 - (\lambda\sigma - \gamma\rho)^2\right] \Phi = \frac{d^2\Phi}{dx^2}.$$

Si l'on pose

$$\Phi = \frac{1}{2\lambda\gamma} e^{-\frac{\lambda\sigma + \gamma\rho}{2\lambda\gamma} t} \pi,$$

ou

$$\pi = 2\lambda\gamma e^{\frac{\lambda\sigma + \gamma\rho}{2\lambda\gamma} t} \Phi.$$

On aura

$$\frac{d\pi}{dt} = e^{\frac{\lambda\sigma + \gamma\rho}{2\lambda\gamma} t} \left(\lambda\sigma + \gamma\rho + 2\lambda\gamma \frac{d}{dt}\right) \Phi$$

Digitized by Google

et, en réitérant, par la même formule

$$2\lambda\gamma\frac{d^2\pi}{dt^2}=e^{\frac{\lambda\sigma+\gamma\rho}{2\lambda\gamma}t}\left(\lambda\sigma+\gamma\rho+2\lambda\gamma\frac{d}{dt}\right)^2\Phi.$$

D'où, après suppression du facteur exponentiel commun,

$$\lambda\gamma\frac{d^2\pi}{dt^2}-\frac{(\lambda\sigma-\gamma\rho)^2}{4\lambda\gamma}\pi=\frac{d^2\pi}{dx^2}.$$

Posons

$$x'=(\lambda\sigma-\gamma\rho)x,$$

$$t'=\frac{\lambda\sigma-\gamma\rho}{\sqrt{\lambda\gamma}}t,$$

il viendra

$$\frac{d^2\pi}{dt'^2}-\frac{\pi}{4\lambda\gamma}=\frac{d^2\pi}{dx'^2}.$$

On a alors

$$\frac{x'}{t'}=\frac{x}{t}:\frac{1}{\sqrt{\gamma\lambda}}.$$

Or $\frac{x'}{t'}$ et $\frac{x}{t}$ ont les dimensions d'une vitesse; donc dans le système (x', t') l'unité de vitesse est la vitesse $\frac{1}{\sqrt{\gamma\lambda}}$.

Cas particuliers. — Si l'on fait $\lambda=\gamma=0$, on a l'équation qui donne la répartition du courant sur une ligne affectée d'une perte uniforme, en régime permanent.

Si l'on fait $\lambda=\sigma=0$, on a l'équation de la propagation du courant sur les câbles bien isolés.

Si l'on fait $\rho=\sigma=0$, on a l'équation de la propagation du courant sur les antennes de la télégraphie sans fil, en première approximation tout au moins.

Si l'on fait $\sigma=0$, on a l'équation ordinaire des télégraphistes.

Propagation du courant sur une ligne indéfinie. — Ce problème revient au suivant :

Résolution de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=az \tag{1}$$

quand on se donne pour $t=0$ les valeurs de z et de $\frac{\partial z}{\partial t}$.

Digitized by Google

1° *Remarque préliminaire.* — Considérons l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a z. \tag{2}$$

On passe de l'une des équations à l'autre en faisant

$$y = t\sqrt{-1}.$$

Or l'équation (2) a pour solution

$$u = 1 + \Sigma a_n r^{2n}$$

(*voir* ondes cylindriques dans un conducteur), en posant

$$a_n = \frac{a^n r^{2n}}{(2^n n!)^2}$$

et

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2.$$

Donc l'équation (1) a une solution particulière

$$u = 1 + \Sigma a_n [(x - x_0)^2 - (t - t_0)^2]^n.$$

Et nous remarquons qu'on a

$$u = 1 \qquad \text{et} \qquad du = 0$$

pour les valeurs de x et de t satisfaisant, soit à

$$x - x_0 = t - t_0,$$

d'où

$$dx = dt;$$

soit à

$$x - x_0 = -(t - t_0),$$

d'où

$$dx = -dt.$$

2° *Deuxième observation.* — Des deux équations

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + a z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a u,$$

on tire, en éliminant a,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(u\frac{\partial z}{\partial t} - z\frac{\partial u}{\partial t}\right).$$

Digitized by Google

Donc il y a une fonction φ de x et de t égale à

$$\varphi = \int_{ab}^{xt} \left(u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u}{\partial x}\right) dt + \left(u\frac{\partial z}{\partial t} - z\frac{\partial u}{\partial t}\right) dx,$$

l'intégration étant prise le long d'un chemin quelconque allant de (ab) à (xt) dans le plan des variables xt. Si donc ce chemin est un chemin fermé, on aura $\varphi = 0$.

3° Application à un chemin fermé constitué comme suit :

Soit $P(x_0 t_0)$ le point de départ; à partir de P nous suivons la droite (D) qui a pour équation

$$x - x_0 = t - t_0$$

jusqu'à sa rencontre avec l'axe des x en Q; puis nous suivons l'axe des x depuis le point Q jusqu'au point où l'axe des x est rencontré, en R, par la droite (D′) qui a pour équation

$$x - x_0 + t - t_0 = 0,$$

enfin nous revenons en P en suivant la droite D′.

Le long de la droite D, on a $u = 1$, $du = 0$.

Or, on a $dx = dt$, donc il vient :

$$\begin{aligned}\varphi_Q - \varphi_P &= \int \left(u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u}{\partial x}\right) dt + \left(u\frac{\partial z}{\partial t} - z\frac{\partial u}{\partial t}\right) dx \\ &= \int \left(u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + \left(u\frac{\partial z}{\partial t} - z\frac{\partial u}{\partial t}\right) dt \\ &= \int u\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial t}dt\right) - z\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial t}dt\right) \\ &= \int u\,dz - z\,du = \int dz = z_Q - z_P.\end{aligned}$$

Le long de l'axe des x, on a $dt = 0$, et, par suite,

$$\varphi_R - \varphi_Q = \int \left(u\frac{\partial z}{\partial t} - z\frac{\partial u}{\partial t}\right) dx.$$

Dans cette intégrale z et $\frac{\partial z}{\partial t}$ sont données par hypothèse.

Enfin, le long de la droite D′, on a $u = 1$, $du = 0$ et $dx = -dt$.

Digitized by Google

D'où :

$$\varphi_P - \varphi_R = \int \left(u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u}{\partial x}\right) dt + \left(u\frac{\partial z}{\partial t} - z\frac{\partial u}{\partial t}\right) dx$$
$$= -\int \left(u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + \left(u\frac{\partial z}{\partial t} - z\frac{\partial u}{\partial t}\right) dt$$
$$= -\int u\,dz - z\,du = -\int dz = -z_P + z_R.$$

Additionnons ces résultats, il vient

$$z_Q - z_P + \int \left(u\frac{\partial z}{\partial t} - z\frac{\partial u}{\partial t}\right) dx - z_P + z_R = 0;$$

d'où

$$z_P = \frac{1}{2}(z_Q + z_R) + \frac{1}{2}\int \left(u\frac{\partial z}{\partial t} - z\frac{\partial u}{\partial t}\right) dx.$$

Cette formule résout le problème, car elle donne la valeur de z au point $(x_0 t_0)$ quelconque connaissant les valeurs de z et de $\frac{\partial z}{\partial t}$ sur l'axe des x, c'est-à-dire pour $t = 0$.

Nous remarquerons que la valeur de z au point P ne dépend que des valeurs de z et de $\frac{\partial z}{\partial t}$ sur l'axe des x entre les points Q et R, c'est-à-dire que la valeur de z au point x_0 et à l'époque t_0 ne dépend que des valeurs de la perturbation initiale situées entre les points Q et R qu'un mobile animé de la vitesse unité pourrait atteindre dans le temps t_0 en partant de l'abscisse x_0 soit dans un sens, soit dans l'autre, le long de la ligne. Donc aucune partie de la perturbation ne se propage plus vite que l'unité. D'après les unités choisies, on verrait facilement que cette vitesse a pour expression $\frac{1}{\sqrt{\gamma\lambda}}$.

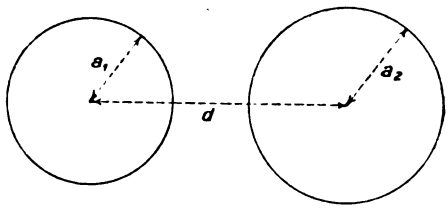
Propagation d'une pertubation brusque le long d'une ligne à double fil. — Si nous étudions la propagation d'une discontinuité du second ordre, nous trouverons, d'après les méthodes précédemment exposées, pour expression de la vitesse de propagation, $V = \frac{1}{\sqrt{\gamma\lambda}}$. Comme la résistance intérieure du conducteur n'intervient pas dans cette formule, il en résulte que la perturbation brusque doit se trouver localisée à la surface des conducteurs.

Nous allons montrer que cette vitesse de propagation le long des fils est la même que la vitesse de propagation d'un ébranlement dans le milieu qui les entoure.

Digitized by Google

On a, en effet, si a_1 et a_2 désignent les rayons des deux conducteurs cylindriques (*fig.* 85) et d la distance de leurs axes, et en

Fig. 85.



supposant a_1 et a_2 très petits par rapport à la distance d,

$$\gamma = \frac{K}{2} \frac{1}{\log \frac{d^2}{a_1 a_2}},$$

$$\lambda = 2K' \log \frac{d^2}{a_1 a_2}.$$

La première de ces formules résulte immédiatement de celle que nous avons établie à la fin de l'Électrostatique.

Nous avons en effet démontré qu'on avait

$$\gamma = \frac{K}{2} \frac{1}{\log(u + \sqrt{u^2 - 1})},$$

où

$$u = \frac{d^2 - a_1^2 - a_2^2}{2 a_1 a_2}.$$

En supposant a_1 et a_2 négligeables vis-à-vis de d, on en déduit bien

$$\gamma = \frac{K}{2} \frac{1}{\log \frac{d^2}{a_1 a_2}}.$$

Quant à la formule qui donne la self-induction, nous allons l'établir dans un instant. Admettons-la, on aura donc bien alors

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{KK'}}.$$

Or $\frac{1}{\sqrt{\gamma\lambda}}$ est la vitesse de propagation d'une perturbation le long du fil et $\frac{1}{\sqrt{KK'}}$ est la vitesse de propagation d'une perturbation électromagnétique dans le milieu qui environne le fil.

Digitized by Google

Self-induction d'une ligne à double fil. — *Lemme I. Formule de Green.* — D'après la formule de transformation d'une intégrale de volume en intégrale de surface, on a

$$\int_U \frac{\partial F}{\partial x}\, d\varpi + \int_S l\, F\, dS = 0,$$

pourvu que F soit une fonction continue des coordonnées.

Posons

$$F = U\frac{\partial V}{\partial x},$$

il vient

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

d'où

$$\int_U \left(U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}\right) d\varpi + \int_S l\, U\frac{\partial V}{\partial x}\, dS = 0.$$

Écrivons les deux autres équations analogues pour y et z et ajoutons membre à membre, il vient

$$\int_U U\,\Delta V\, d\varpi + \int_U \sum \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}\, d\varpi + \int_S U\frac{dV}{dn}\, dS = 0,$$

dn étant l'élément de normale dirigée vers l'intérieur du volume d'intégration.

Écrivons une équation analogue, en permutant les fonctions U et V,

$$\int_U V\,\Delta U\, d\varpi + \int_U \sum \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}\, d\varpi + \int_S V\frac{dU}{dn}\, dS = 0,$$

et retranchons membre à membre, il vient

$$\int_U (U\,\Delta V - V\,\Delta U)\, d\varpi + \int_S \left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right) dS = 0.$$

Telle est la formule de Green. Dans le cas d'un volume cylindrique, la formule se réduira à

$$\int_S (U\,\Delta V - V\,\Delta U)\, dS + \int_C \left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right) ds = 0,$$

S étant la section droite du cylindre et C le contour de cette section droite.

Digitized by Google

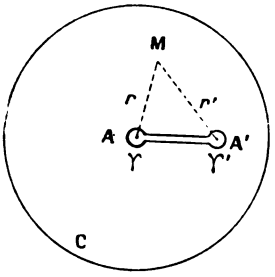
Application. — Nous allons appliquer la formule précédente en posant

$$U = \log r,$$
$$V = \log r',$$

r et r' étant les distances du point variable M (x, y) aux deux points fixes A (a, b) et A′ (a', b') situés à la distance D l'un de l'autre, le contour C étant une circonférence de centre A et de rayon R.

Premier cas. — Le point A′ est intérieur à la circonférence C (*fig.* 86). Si j'exclus de la surface S deux cercles infiniment petits

Fig. 86.



γ et γ' de centres A et A′ reliés par une coupure, les fonctions $U = \log r$ et $V = \log r'$ seront finies, continues et déterminées dans tout cet espace; mais $\Delta U = 0$, $\Delta V = 0$; donc l'intégrale de surface disparaît.

Les parties de l'intégrales de ligne, relatives aux deux bords de la coupure, se détruisent mutuellement, puisque la normale intérieure a des sens opposés pour les deux bords, et il reste

$$\int_C U \frac{dV}{dn} ds + \int_\gamma U \frac{dV}{dn} ds + \int_{\gamma'} U \frac{dV}{dn} ds$$
$$= \int_C V \frac{dU}{dn} ds + \int_\gamma V \frac{dU}{dn} ds + \int_{\gamma'} V \frac{dU}{dn} ds.$$

Or,

$$\frac{dV}{dn} ds = \frac{1}{r'} \frac{\delta r'}{\delta n} ds,$$

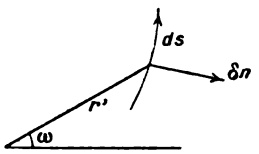
où ds est l'élément d'arc (*fig.* 87); cet arc s est fonction de ω' et de r' et l'on peut écrire, en considérant le vecteur ds,

$$\overrightarrow{ds} = e^{i\omega'} dr' + ir' d\omega' e^{i\omega'}.$$

Digitized by Google

δn est l'élément de la normale à la courbe, supposons δn et ds orientés comme Ox et Oy et admettons que nous prenions pour module

Fig. 87.



de δn un module égal à celui de ds, on aura

$$\overline{\delta n} = -i\,ds = -i\,e^{i\omega'}\,dr' + r'\,d\omega'\,e^{i\omega'}.$$

Ainsi donc $\overline{\delta n}$ est décomposé en deux vecteurs rectangulaires; celui qui est dirigé suivant le rayon vecteur est $r'\,d\omega'$.

Quant à $\delta r'$, c'est l'accroissement que subit le rayon vecteur, quand son extrémité parcourt l'élément de normale δn. C'est donc évidemment $r'\,d\omega'$.

Il vient donc

$$\frac{1}{r'}\frac{\delta r'}{\delta n}\,ds = \frac{1}{r'}\frac{r'\,d\omega'}{\delta n}\,ds = d\omega'.$$

Donc

$$\int_C U\frac{dV}{dn}\,ds = \log R\int_0^{2\pi} d\omega' = 2\pi\log R,$$

$$\int_\gamma U\frac{dV}{dn}\,ds = \log\varepsilon\int_\gamma d\omega' = 0,$$

$$\int_{\gamma'} U\frac{dV}{dn}\,ds = \log D\int_0^{-2\pi} d\omega' = -2\pi\log D,$$

$$\int_C V\frac{dU}{dn}\,ds = \frac{1}{R}\int_C \log r'\,ds,$$

$$\int_\gamma V\frac{dU}{dn}\,ds = \log D\int_0^{-2\pi} d\omega = -2\pi\log D,$$

$$\int_{\gamma'} V\frac{dU}{dn}\,ds = \log\varepsilon\int_\gamma d\omega = 0;$$

d'où

$$\int \log r'\,ds = 2\pi R\log R.$$

Deuxième cas. — Le point A' est extérieur au cercle C. On procède

Digitized by Google

d'une façon toute semblable, mais cette fois on n'a plus à considérer le petit cercle γ' et l'on trouve

$$\int_C \log r'\, ds = 2\pi R \log D.$$

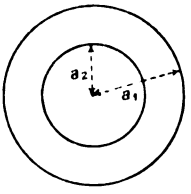
Lemme II. — On a la formule

$$\int x \log x\, dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + \text{const.},$$

formule qui se vérifie immédiatement.

Considérons alors un conducteur cylindrique parallèle à Oz où la densité du courant est constante et égale à w, et que, pour plus de

Fig. 88.



généralité, nous supposerons creux (*fig.* 88). Le courant qui le traverse est

$$I = \pi w (a_1^2 - a_2^2).$$

Le champ magnétique est

$$h' = \frac{2I}{a_1^2 - a_2^2}\left(r - \frac{a_2^2}{r}\right) \qquad \text{dans le tube}$$

et

$$h' = \frac{2I}{r} \qquad \text{à l'extérieur du tube.}$$

et l'induction magnétique est

$$b = K' h' = -\frac{dH}{dr}$$

(H étant le potentiel vecteur). D'où

$$H = -\int K' h'\, dr.$$

On aura donc à considérer trois valeurs de H, savoir :

Digitized by Google

A l'extérieur du tube

$$H_1 = A - 2K'_0 I \log r;$$

dans la substance du tube

$$H_2 = A - 2K'_0 I \log a_1 + \frac{K' I}{a_1^2 - a_2^2}\left(a_1^2 - r^2 + 2a_2^2 \log \frac{r}{a_1}\right);$$

à l'intérieur du tube

$$H_3 = A - 2K'_0 I \log a_1 + K' I \left(1 + \frac{2a_2^2}{a_1^2 - a_2^2} \log \frac{a_2}{a_1}\right).$$

L'expression de l'énergie magnétique, c'est-à-dire de l'énergie cinétique de Maxwell, est, en nous bornant à envisager l'espace compris entre les plans z et $z + l$,

$$T = \frac{1}{2}\int\int\int H w \, dx \, dy \, dz = \frac{l}{2}\int\int H w \, dx \, dy.$$

Nous poserons

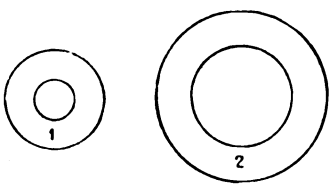
$$\frac{T}{l} = \frac{1}{2} L I^2,$$

par définition de la self-induction L par unité de longueur.

D'où, pour les deux fils (aller et retour),

$$\frac{2T}{l} = \int\int (H w' \, dx' \, dy' + H' w \, dx \, dy + H w \, dx \, dy + H' w' \, dx' \, dy').$$

Fig. 89.



Désignons les quatre intégrales par J_{12}, J_{21}, J_{11}, J_{22}; on aura

$$J_{12} = AI' - 2K'_0 I w' \int\int \log r \, dx' \, dy';$$

mais $dx' dy' = ds' dr'$, en prenant des coordonnées cylindriques,

Digitized by Google

d'où

$$\iint \log r\, dx'\, dy' = \iint \log r\, ds'\, dr' = \int dr' \int \log r\, ds'$$
$$= \int dr' . 2\pi r' \log d = (\pi r'^2)_{a_2'}^{a_1'} \log d,$$

d étant la distance des centres.

D'où

$$J_{12} = AI' - 2K_0' II' \log d.$$

De même

$$J_{21} = A'I - 2K_0' II' \log d.$$

Enfin, on aura

$$J_{11} = \iint II\, w\, dx\, dy = AI - 2K_0' I^2 \log a_1 + \frac{K' I^2 a_1^2}{a_1^2 - a_2^2}$$
$$+ \frac{K' I w}{a_1^2 - a_2^2} \iint \left(- r^2 + 2a_2^2 \log \frac{r}{a_1} \right) r\, d\omega\, dr.$$

On intégrera facilement en se servant du lemme II.

En effectuant tous les calculs et tenant compte de la relation

$$I + I' = 0,$$

on trouvera pour valeur du coefficient de self-induction par unité de longueur

$$L = 2K_0' \log \frac{d^2}{a_1 a_1'} + \frac{1}{2} K_1' \left[\frac{a_1^2 - 3a_2^2}{a_1^2 - a_2^2} + \frac{4a_2^4}{(a_1^2 - a_2^2)^2} \log \frac{a_1}{a_2} \right]$$
$$+ \frac{1}{2} K_2' \left[\frac{a_1'^2 - 3a_2'^2}{a_1'^2 - a_2'^2} + \frac{4a_2'^4}{(a_1'^2 - a_2'^2)^2} \log \frac{a_1'}{a_2'} \right].$$

Si les conducteurs sont pleins ($a_2 = 0$, $a_2' = 0$), on a

$$L = 2K_0' \log \frac{d^2}{a_1 a_1'} + \frac{1}{2}(K_1' + K_2').$$

Si a_1 et a_1' sont très petits, on aura sensiblement

$$L = 2K_0' \log \frac{d^2}{a_1 a_1'}.$$

C'est également cette valeur qu'il conviendrait d'adopter si le courant était superficiel.

Le rapport des unités de quantité d'électricité dans le système électromagnétique et dans le système électrostatique est égal à la vitesse

Digitized by Google

de propagation d'une perturbation électromagnétique. — Maxwell montre que le rapport des unités a les dimensions d'une vitesse de la façon suivante :

Considérons deux courants parallèles, rectilignes et de même sens I et I'. Ils s'attirent.

Soit b leur distance; l'attraction sur la longueur a de l'un d'eux est

$$F = \frac{2aII'}{b}.$$

Supposons

$$I = I', \qquad 2a = b;$$

il vient

$$F = I^2.$$

Soit

$$m = \frac{[Q_m]}{[Q_e]}$$

le rapport de l'unité de quantité électromagnétique à l'unité de quantité électrostatique; alors, la quantité d'électricité, qui est It dans le système électromagnétique, sera mIt mesurée en unités électrostatiques. Si on la fait agir sur une masse égale placée à la distance r, il en résultera une force

$$F' = \frac{m^2 I^2 t^2}{r^2}.$$

En choisissant convenablement $\frac{r}{t}$, il viendra $F = F'$.

Pour qu'on ait cette égalité entre les forces considérées, il faut qu'on ait

$$\frac{r}{t} = m,$$

ce qui montre que m a bien les dimensions d'une vitesse.

Dans ce Cours, nous nous plaçons à un point de vue; nous ferons le raisonnement suivant : l'intensité du champ magnétique dû au courant I est

$$\frac{2I}{b}$$

et la force agissant sur la longueur a du courant I' est

$$F = \frac{2aK'II'}{b};$$

Digitized by Google

d'où, pour $I = I'$, et $2a = b$,

$$F = K' I^2.$$

D'autre part, la quantité d'électricité It produit à distance r un champ d'intensité $\frac{It}{Kr^2}$ qui, agissant sur une masse égale, donnera une force

$$F' = \frac{I^2 t^2}{K r^2}.$$

Si donc on fait

$$\frac{r}{t} = \frac{1}{\sqrt{KK'}},$$

on aura

$$F = F';$$

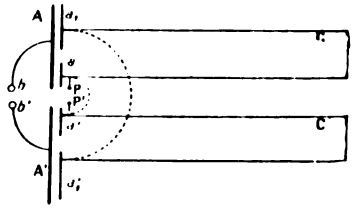
donc

$$m = \frac{1}{\sqrt{KK'}}.$$

En mesurant donc le rapport des unités de quantité d'électricité dans les systèmes électromagnétique et électrostatique, on a un moyen indirect de mesurer la vitesse de propagation des perturbations électromagnétiques.

Procédé de M. Blondlot pour mesurer la vitesse de propagation d'une perturbation brusque. — Deux bouteilles de Leyde A, A', (*fig.* 90) en communication avec les pôles d'une bobine d'induction,

Fig. 90.



ont leurs armatures externes formées de deux parties : a, a_1, a', a'_1. Les portions a, a' et a_1, a'_1 sont reliées séparément par des cordes mouillées qui assurent la charge lente des bouteilles de Leyde (ces cordes sont figurées en pointillé sur le schéma). La décharge de aa' et de $a_1 a'_1$ s'opère brusquement par des étincelles qui partent sur un micromètre à pointes pp' : la décharge de aa' directement, celle

Digitized by Google

de $a_1 a'_1$, par l'intermédiaire des fils télégraphiques CC′ qui réunissent les armatures au micromètre. A chaque étincelle qui éclate en bb', on a donc deux décharges ayant le caractère d'une perturbation brusque. Les petites armatures aa' se déchargent tout d'abord à travers pp'; puis une seconde étincelle se produit; ce sont les armatures $a_1 a'_1$ qui se déchargent à travers les fils CC′. Cette dernière étincelle est en retard sur la première du temps que la décharge a mis à se propager le long du fil de ligne. Pour que la seconde étincelle soit d'un éclat comparable à la première, les armatures $a_1 a'_1$ sont plus grandes que aa'.

Ce temps sera mesuré en séparant dans l'espace les deux étincelles à l'aide d'un miroir tournant. On trouve ainsi que la vitesse de propagation est sensiblement égale à celle de la lumière.

FIN DU TOME I.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION V

CHAPITRE I.

ÉLECTROSTATIQUE.

Force électrique 1
Exploration d'un champ électrique. Discussion de la méthode de M. Vaschy relative à la définition du champ 2
Définition du pouvoir inducteur électrique 6
Expression mathématique de la quantité d'électricité existant à l'intérieur d'une surface fermée. (Transformation d'une intégrale de surface en une intégrale de volume) 8
Principe de la conservation de l'électricité 11
Mesures des charges au moyen du cylindre de Faraday 13
Théorie des actions à distance (introduction des expressions mathématiques divergence et rotation) 14
Interprétation de la divergence et de la rotation dans la cinématique des milieux continus 18
Lemme préliminaire au théorème de Vaschy. (L'identité mathématique qui y est démontrée appliquée aux divers phénomènes électromagnétiques est l'expression du principe de l'égalité de l'action et de la réaction) 20
Théorème de Vaschy 21
Extension du théorème de Vaschy au cas où le point envisagé est sur une surface de discontinuité du champ 24
Expression et représentation géométrique des tensions et pressions de Maxwell (cas des charges isolées dans le milieu diélectrique) 25
Tension électrostatique en un point de la surface d'un conducteur 26
Tensions et pressions dans le cas général 27
Introduction du potentiel newtonien et du potentiel vecteur. (Loi de Newton et Loi de Laplace) 27
Existence d'un potentiel. (Transformation d'une intégrale de ligne en une intégrale de surface). Absence de tourbillon 30
Expression de l'énergie du champ électrostatique 31

Digitized by Google

Pages.
Champ électrique à l'intérieur d'un corps solide : 1° Existence d'un potentiel.. 35
2° Conservation de la charge..... 36
Champ électrique à l'intérieur des conducteurs..... 38
Condensateur plan à faces parallèles..... 41
Champ électrique dans un diélectrique polarisé uniformément..... 42
Polarisation diélectrique..... 44
Définition du champ; définition du déplacement; définition de l'intensité de la polarisation..... 45
Le champ a une distribution irrotationnelle, le déplacement d'une distribution solénoïdale..... 50
Constitution des diélectriques..... 53
Problème de la distribution électrostatique..... 57
Unicité de la solution..... 60
Théorie du déplacement de Maxwell..... 61
Équation fonctionnelle de Robin..... 63
Influence d'une charge concentrée en un point sur une sphère conductrice..... 65
Équation fonctionnelle relative à la surface d'un diélectrique..... 66
Sphère diélectrique au sein d'un champ uniforme. (Résolution du problème au moyen d'une équation fonctionnelle)..... 67
Moment diélectrique de cette sphère..... 69
Action mécanique sur l'unité de volume..... 71
Système de conducteurs isolés dans un champ électrostatique. (Variations de l'énergie à potentiels constants ou à charges constantes; analogies mécaniques). 73
Tensions et pressions du champ électrostatique, méthode de Blondlot..... 79
Capacité de deux fils télégraphiques (Expression en fonction de l'angle imaginaire sous lequel les cercles de base se coupent)..... 80
Cas général; répartition d'une charge entre les deux conducteurs maintenus au même potentiel..... 86
Champ dû à un plan uniformément chargé..... 94
Les surfaces équipotentielles d'un champ dont l'intensité a une grandeur absolue constante, sont des plans parallèles..... 97
Aspiration d'une lame diélectrique entre les plateaux d'un condensateur plan.. 98
Théorie de l'électromètre à quadrants..... 99

CHAPITRE II.

ÉLECTROCINÉTIQUE.

Champ électrostatique des courants..... 103
Distribution électrostatique du champ dans l'âme d'un câble entre le toron et l'armature quand le toron est parcouru par un courant constant..... 109
Intensité du champ électrique dans un conducteur..... 112
Emploi de l'électromètre pour la mesure des différences de potentiel. Courants linéaires..... 114
Force électromotrice d'une pile..... 117
Loi des échauffements ou de Joule..... 117
Décharge du condensateur; loi de Faraday $Q = It$..... 119
Loi de continuité ou de Kirchhoff..... 119
Structure discontinue des charges électriques..... 119
Résistance intérieure des piles..... 122

Digitized by Google

Pages.
Réseaux de conducteurs parcourus par des courants permanents..... 122
Décomposition d'un diagramme en mailles..... 124
Ligne affectée d'une perte uniforme..... 125
Distribution du courant à l'intérieur d'un conducteur à trois dimensions. Propriété de minimum de chaleur dégagée..... 126
Application du calcul des variations: le vecteur courant qui est solénoïdal doit être irrationnel..... 127
Étude du pont de Wheatstone pour la mesure des résistances; conditions de plus grande sensibilité; choix de la branche de pile et de la branche galvanométrique..... 133
Théorème de Thévenin..... 136
Nouvelle expression de la différence de potentiel entre deux points d'un réseau en fonction des forces électromotrices intérieures..... 137
Théorèmes de réciprocité..... 139
Extension des lois de Kirchhoff au cas où les f. e. m. comprennent des f. e. m. d'induction et au cas où il y a des capacités; forme symétrique donnée aux équations; étude des racines de l'équation caractéristique; oscillations propres des réseaux..... 140
Variations de la chaleur de Joule à potentiels constants ou à intensités constantes. 143
Répartition du champ électrique au voisinage d'un conducteur parcouru par un courant..... 143
Conducteurs hétérogènes, conducteurs anisotropes; définition du champ électrique et du courant, théorie de M. Mallard..... 150

CHAPITRE III.

MAGNÉTISME ET ÉLECTROMAGNÉTISME.

Force magnétique. Champ terrestre..... 152
Champ magnétique quelconque..... 156
Étude du champ créé par un aimant..... 157
Champ dans un canal infiniment délié, champ dans une coupure infiniment mince..... 160
Chemin brisé; tétraèdre élémentaire; définition du champ, de l'induction magnétique; masses fictices newtoniennes ou vectorielles; hypothèses de Coulomb et d'Ampère..... 161
Moment magnétique; application du principe de l'égalité de l'action et de la réaction aux coefficients d'influence caractérisant un petit aimant suivant qu'il subit une action ou qu'il crée un champ..... 166
Théorie du magnétisme; constitution des aimants suivant Sir W. Thomson..... 167
Rotation, divergence, discontinuité du vecteur, champ magnétique et application du théorème de Vaschy conduisant des faits observés à la constitution des aimants comme agrégats de particules polarisées..... 175
Magnétisme induit..... 177
Électromagnétisme..... 178
Mesure du courant par l'électromètre ou le galvanomètre..... 183
Courant de déplacement..... 184
Équivalence d'un circuit linéaire et d'un feuillet..... 185
Potentiel d'un courant linéaire..... 189
Action d'un pôle sur un élément de courant..... 189

Digitized by Google

Pages.
Démonstration de l'expression de cette action par l'application de la formule analytique qui exprime l'égalité de l'action et de la réaction..... 191
La résultante des actions appliquées aux divers éléments d'un circuit fermé et dues à la présence d'un pôle magnétique, est appliquée à ce pôle.... 191
Expression des pressions et des tensions qui règnent dans un milieu, siège du champ magnétique..... 193

CHAPITRE IV.

ÉLÉMENTS DE CALCUL VECTORIEL.

Choix des axes..... 194

SECTION I. — Symboles du calcul vectoriel; produits intérieur et extérieur.
Règles de calcul des vecteurs..... 196
Application à la théorie des rotations..... 198
Applications à la mécanique. Déplacement d'un corps rigide..... 202
Mouvement d'un milieu continu non rigide..... 204
Déformation homogène..... 205
Dilatation cubique..... 205
Rotation et dilatation pure..... 206
Calcul des éléments..... 207
Formule de transformation..... 209
Transformation infinitésimale..... 209
Détermination de la rotation..... 211
Détermination des éléments de la rotation pure..... 211

Condition d'existence d'une solution différente de zéro. Opérations réitérées.... 212
Réalité des racines de l'équation du troisième degré..... 213
Les dilatations principales forment un trièdre trirectangle..... 213
Réduction de Φ à la forme la plus simple..... 214
Calcul des coefficients de l'équation du troisième degré; méthode d'Hamilton... 214
Coordonnées cartésiennes..... 217
Rotation et dilatation pure..... 218
Rotation infinitésimale..... 219
Dilatation infinitésimale..... 220

SECTION II. — Équations de la Dynamique; équation de la résultante et équation du moment résultant..... 222
Symétrie; variation de la pression suivant la direction de l'élément pressé.
Généralisation de la formule d'Ostrogradski..... 223
Réciprocité des composantes tangentielles..... 224
Pressions principales..... 225
Corps élastiques isotropes..... 231
Équations du mouvement des fluides..... 234
Cas du frottement..... 235

SECTION III. — Symboles différentiels..... 235
Diverses règles de calcul..... 236
Formule de Stokes..... 240
Variation d'un flux; variation d'une intégrale double..... 242

Digitized by Google

Pages.

SECTION IV. — Application de la notation vectorielle aux quatre premiers Chapitres du Cours 248
Travail des forces électrodynamiques..... 253

CHAPITRE V.

ÉLECTRODYNAMIQUE.

Travail des forces électrodynamiques en coordonnées cartésiennes..... 255
Formules diverses de $\int \frac{k' H^2}{8\pi} d\varpi$, en fonction des intensités et des flux; en fonction des intensités; en fonction du courant et du potentiel vecteur..... 260
Formule de Neumann 265
Formule d'Ampère comme conséquence de la formule de Neumann..... 26
Rotation du potentiel vecteur des courants particulaires..... 267

CHAPITRE VI.

THEORIE DE L'INDUCTION.

Travail élémentaire produit par les forces électrodynamiques dans le déplacement d'un circuit 273
Application du principe de la conservation de l'énergie..... 275
Localisation de la f. e. m. d'induction..... 278
Formes diverses de l'énergie magnétique..... 281
L'énergie relative des courants et des aimants est nulle..... 282
Comparaison du travail et de l'énergie..... 284
Travail de déplacement d'un circuit à intensité constante ou à flux constant... 286
Application des lois de l'induction aux machines dynamo-électriques..... 286
Théorie de l'induction de Maxwell..... 287
Équations de la Dynamique pour un système à liaisons; méthode de Thomson et Tait, où l'énergie cinétique est considérée comme due à des impulsions; méthode analogue de Maxwell..... 287
Application à l'Électrodynamique..... 294

CHAPITRE VII.

Équations générales de l'Électrodynamique pour un milieu en repos..... 304
Vecteur radiant de Poynting..... 306
Autre méthode relative à la variation d'une intégrale de surface..... 308
Électrodynamique des milieux en mouvement..... 311
Décomposition du courant total..... 311
Action électromagnétique d'une quantité d'électricité en mouvement..... 315

Digitized by Google

CHAPITRE VIII.

THÉORIE DE LORENTZ.

Pages.

Résumé en notation vectorielle de la théorie de Maxwell 318
Théories moléculaires 320
Théorie de Lorentz 322
Équations fondamentales relatives à un système d'ions répartis dans l'éther 323
Équations du champ dans l'éther 326
Calcul de la force mécanique qui agit sur la matière pondérable; application du principe de la moindre action 328
Diélectriques; vecteur courant 334
Expression du courant, dans le cas d'un milieu en mouvement 336
Loi de l'induction électromagnétique 339
Proposition de Poynting 341
La quantité de mouvement électromagnétique 342
Intégration des équations de Lorentz quand le mouvement des ions est donné. 343

CHAPITRE IX.

PROPAGATION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES.

Propagation des discontinuités 349
Propriétés du front de l'onde; les vecteurs E et H sont perpendiculaires l'un à l'autre; les énergies électrique et magnétique moyennes sont égales 354
Sens de propagation de l'onde 356
Ondes planes 356
Réflexion et réfraction 359
Ondes cylindriques périodiques dans un conducteur 364
Introduction de la fonction J_0 de Bessel sous forme d'intégrale définie 369
Équation des télégraphistes 371
Formes réduites diverses 375
Propagation du courant sur une ligne indéfinie (solution de M. Picard développée par M. Jordan). Variante concernant la façon d'introduire la fonction de Bessel 377
Propagation d'une perturbation brusque le long d'une ligne à double fil 380
Self-induction d'une ligne à double fil; calcul de Maxwell 382
Lemmes relatifs au potentiel logarithmique 383
Rapport des unités de quantité d'électricité électrostatique et électromagnétique. 387
Méthode de Blondlot pour la mesure de la vitesse de propagation d'une perturbation brusque le long d'un fil 389

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

52810 Paris. -- Imprimerie GAUTHIER-VILLARS et Cie, 55, quai des Grands-Augustins.

Digitized by Google

Digitized by Google

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

BERGER (K.), Inspecteur supérieur des Postes d'Allemagne. — **La Télégraphie et la Téléphonie simultanées et la Téléphonie multiple.** Traduit par P. LE NORMAND, Ingénieur des Postes et Télégraphes. (*Bibliothèque des Annales des Postes, Télégraphes et Téléphones*). In-8 (25-16) de IV-134 pages, avec 111 figures; 1913..... 4 fr. 50 c.

ESCARD (Jean), Ingénieur civil. — **Les substances isolantes et les méthodes d'isolement utilisées dans l'industrie électrique.** In-8 (25-16) de XX-314 pages avec 182 figures; 1911..... 10 fr.

FLEMING (J.-A.). — **Propagation des courants électriques dans les conducteurs téléphoniques ou télégraphiques.** Traduit par C. RAVUT. In-8 (25-16) de VII-348 pages avec 81 figures; 1913..... 12 fr.

GÉRARD (Eric), Directeur de l'Institut électrotechnique Montefiore, annexé à l'Université de Liége. — **Leçons sur l'Electricité**, professées à l'Institut électrotechnique. 8e édition, entièrement refondue. 2 volumes in-8 (25-16), se vendant séparément :

TOME I. — *Théorie de l'Électricité et du Magnétisme, Électrométrie. Théorie et construction des générateurs électriques*, avec 458 figures; 1910..... 12 fr.

TOME II. — *Transformateurs. Canalisation et distribution de l'énergie électrique. Application de l'électricité à la télégraphie, à la téléphonie, à l'éclairage, à la production et à la transmission de la puissance motrice, à la traction, à la métallurgie et à la Chimie industrielle*, avec 459 figures; 1910..... 12 fr.

GERARD (Eric). — **Mesures électriques.** Leçons professées à l'Institut électrotechnique de Montefiore. *Etalons et instruments. Essais mécaniques, photométriques, magnétiques et électriques. Applications aux lignes, générateurs, moteurs et transformateurs.* 5e édition refondue et complétée. In-8 (25-16), avec nombreuses figures; 1912..... 12 fr.

MAREC (Eugène), Ingénieur diplômé de l'Ecole supérieure d'Electricité. — **Les enroulements industriels de machines à courant continu et à courant alternatif.** In-8 (25-16) de X-240 pages avec 212 figures; 1911..... 9 fr.

REIN (le Dr Ing.). — **La Technique de la radiotélégraphie.** Traduit de l'allemand d'après la 2e édition, par G. VIARD, Ingénieur des Postes et Télégraphes. Avec une Préface de J.-B. POMEY, Ingénieur en chef des Postes et Télégraphes. (*Bibliothèque des Annales des Postes, Télégraphes et Téléphones*). In-8 (25-16) de XIV-254 pages avec 170 figures et 5 planches; 1913..... 9 fr.

VAN DAM (I.), Fonctionnaire du service technique des Télégraphes de l'Etat Néerlandais. — **Les Surtensions dans les distributions d'énergie électrique et les moyens d'en prévenir les inconvénients.** In-8 (23-14) de XI-273 pages, avec 109 figures; 1914..... 12 fr. 50

VICAIRE (P.), Inspecteur général des Mines. — **Cours de Chemins de fer** (Cours de l'Ecole nationale supérieure des Mines). *Matériel roulant. Traction. Voie. Exploitation.* Rédigé et terminé par **F. MAISON**, Ingénieur au Corps des Mines. In-8 (25-16) de 581 pages, avec de nombreuses figures; 1903..... 20 fr.

32810 Paris. — Imp. Gauthier-Villars et Cie, 55, quai des Grands-Augustins.

Digitized by Google

Digitized by Google

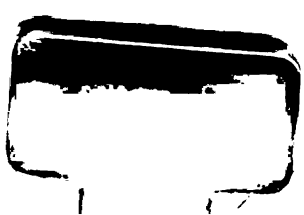
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06973 4252

BOUND
SEP
UNIV OF MICH
LIBRARY



Digitized by Google